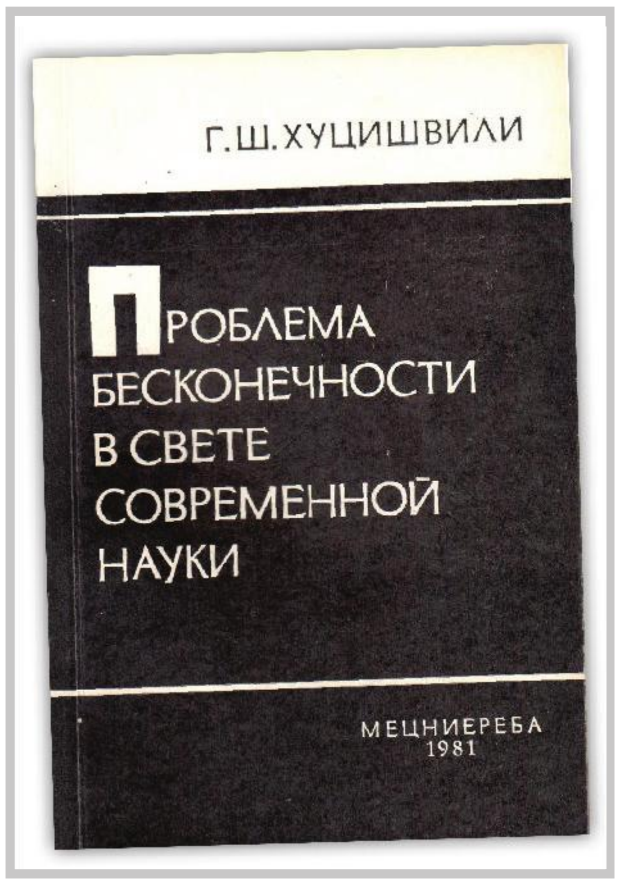
ПРОБЛЕМА БЕСКОНЕЧНОСТИ В СВЕТЕ СОВРЕМЕННОЙ НАУКИ



ВВЕДЕНИЕ

Книга является первой монографической работой в грузинской философской литературе, специально посвященной философско-методологическому исследованию проблемы бесконечности. Рассматриваются вопросы исторического и логического формирования идеи бесконечности в мышлении, соотношения применяемых в науке абстракций осуществимости и бесконечности, критически анализируются логические и гносеологические основания финитистского взгляда на мир. Центральное место в работе занимает вопрос взаимоотношения и взаимовлияния философских и математических представлений о бесконечном.

Проблема бесконечности имеет древнюю историю; ею занимались почти все крупнейшие мыслители в истории науки, но до сих пор ее справедливо относят к числу наиболее сложных и малоисследованных проблем. «С давних пор никакой другой вопрос так глубоко не волновал человеческую мысль, как вопрос о бесконечном; бесконечное действовало на разум столь же побуждающе и плодотворно, как едва ли действовала какая-либо другая идея; однако ни одно другое понятие не нуждается так сильно в разъяснении, как бесконечность»[1]. С тех пор, как были высказаны эти знаменитые слова Давида Гильберта, прошло более полувека, этот период отмечен значительным прогрессом в развитии науки, но их вполне можно отнести и к 1981 году, что в значительной степени обусловлено специфичностью проблемы бесконечности.

Именно этой специфичностью, сложностью и многогранностью (не говоря уже об актуальности и важности выяснения сущности бесконечного для решения большинства философских проблем) был обусловлен

1 Д. Гильберт. Основания геометрии (Добавление VIII. «О бесконечном»), М.–Л., 1948, с. 341.

тот интерес, который проявляли к проблеме бесконечности классики марксистско-ленинской философии. Ф. Энгельс в двух своих фундаментальных философских произведениях – «Анти-Дюринг» и «Диалектика природы» – уделяет проблеме бесконечности значительное внимание. Исследование Ф. Энгельсом проблемы бесконечности, данное в органическом единстве с исследованием других коренных вопросом диалектико-материалистического мировоззрения и критикой идеалистических и метафизических концепций, представляет собой яркий образец применения диалектического метода к решению фундаментальных научных проблем, вообще, и методологическую основу для исследования конкретных аспектов проблемы бесконечности, в частности.

Из наук, широко применяющих категорию бесконечного, прежде всего, следует выделить математику, физику и астрономию. Вместе с тем, применяемые в современном естествознании абстракции бесконечности носят математический характер; поэтому принципиально важное значение имеет выяснение взаимоотношения философского и математического аспектов проблемы. Мы позволим себе не согласиться с мнением Г. И. Наана, согласно которому «понятие бесконечности в современной науке является математическим (или, во всяком случае, в первую очередь математическим)[1]. Философское понимание бесконечности и исторически, и логически предшествует специально-научному. По словам Ф. Энгельса, «математическое бесконечное заимствовано из действительности, хотя и бессознательным образом, и поэтому оно может быть объяснено только из действительности, а не из самого себя, не из математической абстракции»[2].

Интересно взаимоотношение проблемы бесконечности и формальной логики. По принятому среди логи-

1 Г. И. Наан. Понятие бесконечности в математике и космологии. Сб. «Бесконечность и Вселенная», М., 1969, с. 8; Того же. К проблеме бесконечности, «ВФ», 1965, № 12, с. 58.

2 К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. 20, с.286.

ков мнению, идея бесконечности носит внелогический характер (аксиома бесконечности – специфически математическое допущение – есть, по их мнению, то, что отличает «чистую» математику от «чистой» логики), однако многие трудности, связанные с применением абстракции актуальной бесконечности, носят, как будет показано ниже, логический характер.

Исследование истории проблемы бесконечности (кроме некоторых узловых моментов) не входит в цели настоящей работы, поэтому мы лишь бегло обрисуем ход ее развития. Как отмечают в своей совместной монографии В. И. Свидерский и А. С. Кармин, идея бесконечности в эпоху своего зарождения, до появления первых научных концепций, носила характер гипертрофированной конечности[3]. Понимание бесконечности как неопределенности, как практически неосуществимого (кстати, это донаучное представление о бесконечном неожиданно возродилось в середине двадцатого века!) отражало ограниченность возможностей человека и его способности оценить масштабы природных явлений.

В философии досократиков встречаются черты двух форм бесконечного: потенциальной и актуальной бесконечности. Обе эти формы участвуют в знаменитых парадоксах Зенона Элейского. Открытия Зенона (вместе с открытиями пифагорейцев) оказали, как известно, катастрофическое действие на древнюю науку и привели к первому кризису оснований математики. Это обусловило резко отрицательное отношение к идее актуальной бесконечности (считавшейся основной причиной апорий) со стороны многих последующих поколений ученых. Со времен Аристотеля и в философии и в математике утвердилось положение: **infinitum actu non datur.**

3 В. И. Свидерский, А. С. Кармин. Конечное и бесконечное, М., 1966, с. 17–21.

Господство аристотелевской трактовки потенциальной бесконечности не смог поколебать и второй кризис оснований математики, происшедший после открытия И. Ньютоном и Г. Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления и связываемый с проблемой обоснования понятий бесконечно малой и бесконечно большой величин. Однако, как мы постараемся показать в настоящей работе, понятие предела не укладывается в аристотелевское понимание «бесконечности в потенции».

Крупнейшим событием в истории математики явилось создание Георгом Кантором теории множеств, поставившей новые и по-новому осветившей старые проблемы обоснования математических понятий. Учение Г. Кантора об актуально-бесконечных множествах явилось революцией не только в математике, но и в научном мышлении вообще. Актуальная бесконечность, изгонявшаяся из науки более двух тысячелетий, заняла свое место в системе научных понятий. Даже несмотря на открытые впоследствии многочисленные антиномии (вызвавшие третий кризис основ математики)[1], теория множеств продолжает оставаться основой большинства математических дисциплин.

В философии, как известно, решительный удар по абсолютному господству потенциальной бесконечности нанес Гегель. «Бесконечность бесконечного прогресса остается обремененной конечным как таковым, ограничена им и сама конечна»[2]. Такой тип бесконечного Гегель называл «дурной» бесконечностью. Как бы ни относиться к т. н. «истинной» бесконечности Гегеля, необходимо признать, что критика им «дурной» бесконечности имела выдающееся значение.

Можно выделить следующие основные узловые пункты эволюции учения о бесконечном: переход от «неосуществимой конечности» к бесконечности (зна-

1 О трех кризисах оснований математики см.: А. Френкель, И. Бар – Хиллел. Основания теории множеств, М., 1966.

2 Гегель. Наука логики, т. I, М., 1970, с. 207. В истории науки ни одна идея не вызывала более противоречивых оценок, чем актуальная бесконечность, от резко отрицательных («открытое в бесконечность поле возможностей было ошибочно принято за замкнутый мир вещей, существующих в себе (H. Weyl, Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton, 1949, p. 234). до восторженных («завоевание актуальной бесконечности методами теории множеств можно рассматривать как расширение нашего науч-

меновавший, по нашему мнению, переход к теоретическому, абстрактному мышлению), апории Зенона, «Физика» Аристотеля, «Начала» Ньютона, теория пределов Коши-Больцано, теория множеств Кантора. Послеканторовское развитие математики и логики, вопреки распространенному мнению, в позитивном плане почти ничего не смогло добавить к учению о бесконечном.

Апории Зенона могут служить наиболее ярким и доступным «введением» в проблему бесконечности (так же, как и в тесно связанные с ней проблемы движения и непрерывности), поэтому мы сочли целесообразным предпослать своему исследованию анализ апорий. Читатель знакомый с апориями, может пропустить изложение их содержания; однако мы не советуем делать того же относительно анализа взглядов Аристотеля, имеющих фундаментальное значение для исследования многих классических проблем. Три проблемы, анализу сути и взаимосвязи которых посвящена первая глава работы – проблему бесконечности, проблему континуума (непрерывности) и проблему движения – можно смело отнести к числу сложнейших проблем, когда-либо стоявших перед человеческим разумом. Это так называемые «вечные», неисчерпаемые проблемы науки. Н. Бурбаки пишет, что «от Элеатов до Больцано и Кантора математики и философы безуспешно бились над парадоксом конечной величины, составленной из бесконечного числа точек, лишенных величины», подчеркивая в то же время точку зрения «большинства математиков» (и, конечно же, самого Бурбаки), которая «состоит главным образом в отказе от споров за отсутствием возможности разрешить их неопровержимыми средствами»[3]. Мы поддерживаем другую точку зрения, сторонники которой, не ставя перед собой глобальных целей, в то же время не отказываются от споров на рациональной основе, считая, что только таким путем

ного горизонта, не меньшее по значению, чем копернниовская система в астрономии или теория относительности или квантовая теория в физике» (A. Fraenkel, Abstract Set Theory, Amsterdam, 1953, p. 331). Анализ основных математических абстракций осуществимости и бесконечности показывает логическую неустранимость идеи актуальной бесконечности, что однако, как будет показано ниже, не означает правомерности философского представления о «мире как актуальной бесконечности».

3 Н. Бурбаки. Теория множеств, М., 1965, с. 326.

можно приоткрыть завесу тайны над объективно существующими проблемами.

Философский анализ проблемы бесконечности проводится в работе, как в онтологическом, так и в гносеологическом аспекте. Реальная бесконечность, рассмотренная в онтологическом плане, представляет собой неотъемлемую характеристику объективной действительности. Истинная бесконечность мира заключается в том, что, какие бы сферы действительности мы не рассматривали, везде мы наталкиваемся на ничем невосполнимую бездну, называемую неисчерпаемостью форм и состояний материи. Бесконечность есть способ, «принцип» строения мира, характеризующий последний с точки зрения его внутренней организации, структуры; в то же время бесконечность есть принцип познания мира. Много раз ученым казалось, что они создали теорию, способную дать окончательное решение проблемы строения и познания мира. «Но это благополучие, много раз бравшее верх в истории науки, в конечном счете, основывается на надежде, что природа, в общем, не очень изобретательна. Но природа женского рода (во всяком случае, в русском языке), и надежда, вероятно, иллюзорна»[1]. В любом исследовании необходимо начинать с какого-то исходного положения, поэтому (в гносеологическом плане) можно дать следующее предварительное «определение» реальной бесконечности: бесконечность мира выражается в том, что многообразие явлений и видов связей между ними невозможно полностью отобразить ни в одной теории или конечной их совокупности.

Важное значение имеет исследование диалектического единства конечного и бесконечного. Понятие бесконечного необходимо предполагает, что имеется понятие конечного (без которого само понятие бесконечного теряет смысл), и наоборот. Различные аспек-

1 Г. И. Наан. Типы бесконечного. Эйнштейновский сборник 1967 г., с. 289.

ты проблемы конечного и бесконечного исследуются в многочисленных работах советских и зарубежных философов. В частности, в грузинской философской литературе имеются исследования диалектико-логической стороны проблемы, где акцент сделан на выявлении диалектической связи конечного и бесконечного, а также роли бесконечного в философских основаниях логики и математики. Центральную роль в работах Л. П. Гокиели[2] играют понятия «бесконечного регресса» и связанного с ним понятия «коренного вывода», а в работах С. Б. Церетели[3] – «бесконечного умозаключения», где понимание бесконечного основывается на самообусловленности. Проблемы бесконечности касается также С. Ш. Авалиани, который отрицает существование «чистой» конечности и «чистой» бесконечности; в реальности, по его мнению, может существовать лишь «псевдобесконечное»[4]. К сожалению, мы лишены возможности сколько-нибудь подробно рассмотреть в этой небольшой книжке многие современные философские работы, разобрать их сильные и слабые стороны[5].

Позицию автора настоящей работы можно охарактеризовать как инфинитизм, основывающийся как на гносеологических аргументах (см. главу третью), так и на логических (см. главу вторую). Однако, несмотря на антифинитистскую направленность работы, мы не можем согласиться с выводом некоторых философов об «очевидности» или «неизбежности» положительного решения проблемы. С гносеологической точки зрения признание реальной бесконечности мира требует как исторического исследования (здесь можно отослать читателя хотя бы к той же монографии В. И. Свидерского и А. С. Кармина), так и анализа основных современных научных концепций.

2

См.: Л. П. Гокиели. Логика, т. I, Тб., 1965; т. 2, Тб., 1967; Основания математики, Тб., 1958 (на груз. яз.).

3

См.: С. Б. Церетели. Диалектическая логика, Тб., 1971; О диалектической природе логической связи, Тб., 1956 (на груз. яз.).

4

С. Ш. Авалиани. К проблеме бесконечности. «Мацне“ (серия философии...), 1971, № 4, с. 63.

5

К тому же необходимо отметить, что основной материал работы подготовлен в 1975–1977 гг. попирается на литературу предшествующего периода.

Что касается проблемы логического обоснования идеи бесконечности, то можно согласиться с Э. М. Чудиновым в том, что бесконечность невозможно вывести логически корректным путем из каких-либо предпосылок[1]. (В первой главе мы приходим к аналогичному выводу относительно понятия движения). Характерно, что и в математике любые попытки логического обоснования идеи бесконечности оказались безуспешными. «С аксиоматической точки зрения есть только одна возможность получения бесконечных множеств – постулировать их существование»[2], – говорится в известной монографии по основаниям современной математики.

Вообще, фундаментальные предпосылки любого исследования приходится (явно или неявно) постулировать. Основной постулат, принимаемый нами в настоящей работе, заключается в следующем: идее бесконечности в человеческом сознании соответствует реальная характеристическая черта объективной действительности, отражением которой является указанная идея. Это положение, которое можно считать закономерным итогом развития естествознания и философии, дает общую основу для исследования сущности и проявлений реальной бесконечности. В этой связи интересно привести слова Г. И. Наана: «Грубо говоря, существование реальной бесконечности доказывается тем, что мы вынуждены, если хотим правильно понимать мир, постулировать бесконечность в том или ином ее аспекте, то есть не можем без нее обойтись»[3].

Понятие бесконечности неразрывно связано с принципами, на которых строится философская система. Всеобщность философских категорий и законов означает их применимость в бесконечной области. Кроме того, бесконечность явно или неявно участвует в любом рассуждении, касающемся мира в целом, матери-

1 См. работы Э. М. Чудинова в Эйнштейновском сборнике 1968 г., а также в сборнике «Бесконечность и Вселенная».

2 А. Френкель, И. Бар-Хиллел. Основания теории множеств, с. 107.

3 Г. И. Наан. Понятие бесконечности в математике и космологии; с. 77.

альной субстанции, основных форм ее существования: пространства, времени и движения. Бесконечность можно отнести к числу фундаментальных признаков, атрибутов материи. Фундаментальная роль бесконечного в математике побудила Г. Вейля определить математику, как науку о бесконечном[4]. Марксистская философия изучает наиболее общие законы бесконечного развития мира, а также универсальные закономерности неисчерпаемой материальной действительности, поэтому, на тех же основаниях и философию можно назвать наукой о бесконечном.

В заключительной главе работы категория бесконечности рассматривается в связи с некоторыми фундаментальными философскими и общенаучными принципами. Выяснение давно назревшего вопроса о правомерности онтологического понятия «мира как целого» заставляет углубиться в ряд гносеологических и методологических проблем, и только после этого можно попытаться осмыслить на современном уровне вопросы интенсивной и экстенсивной бесконечности мира, бесконечности его изменения и развития. Разумеется, мы отдаем себе отчет в том, что здесь невозможно было в достаточной степени осветить все затронутые проблемы; в то же время не затронуть их также было невозможно, поскольку все они необходимым образом связаны с каким-либо существенным аспектом проблемы бесконечности.

4 Г. Вейль. О философии математики, М.–Л., 1934, с. 9.

ГЛАВА ПЕРВАЯ СВЯЗЬ ПРОБЛЕМЫ БЕСКОНЕЧНОСТИ С ПРОБЛЕМАМИ ОТОБРАЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ДВИЖЕНИЯ В ЛОГИКЕ ПОНЯТИЙ

§ 1. АПОРИИ ЗЕНОНА О ДВИЖЕНИИ И МНОЖЕСТВЕННОСТИ ВЕЩЕЙ

Около двух с половиной тысячелетий назад учеником главы элейской школы метафизиков Парменида Зеноном Элейским были сформулированы знаменитые парадоксы (апории), утверждавшие иллюзорность, обманчивость данных чувственного опыта, вторичность атрибутов[1] природы по отношению к единому метафизическому бытию элеатов, единственной реальности, допускаемой философией Парменида. Поскольку основными атрибутами природы считались движение и множественность вещей (которых в то же время было лишено «единое» как высшая реальность), то жало своих парадоксов Зенон направил в первую очередь против них.

Путем открытия противоречий в процессе осмысления самых элементарных, интуитивно ясных вещей Зенон заставлял читателей усомниться в реальности окружавшей их природы и задуматься о существовании какой-то более высокой, абсолютно необходимой и поэтому свободной от противоречий сущности.

По свидетельству древних, существовало 45 апорий Зенона, из которых до нас дошли только девять. Их подразделяют на две основные группы, в одной из которых опровергается реальность движения, а в другой – реальность «многого». К сожалению, сочинения само-

1 Термин «атрибут» здесь и ниже употребляется автором в широком смысле слова. То же можно сказать относительно некоторых других понятий.– Ред.

го Зенона полностью утеряны и единственным, источником сведений о них являются сочинения Аристотеля, уделившего апориям значительное внимание, а также комментарии Симплиция к «Физике» Аристотеля. Это обусловило существование множества интерпретаций апорий, наибольшую известность из которых получили интерпретации Э. Целлера[2] и П. Таннери.

Одним из фундаментальных понятий, с которыми оперируют парадоксы Зенона, является понятие бесконечности открытие Зеноном противоречивой сущности бесконечного (вместе с открытием противоречивой сущности движения) можно смело отнести к числу крупнейших, открытий в истории науки. Подобные открытия всегда приводили к кризису устоявшейся системы взглядов, а преодоление кризисов всегда было сопряжено с новыми крупными открытиями. В этом проявляется диалектический путь развития науки.

В своих аргументах, направленных против движения, Зенон исходил из широко распространенного в то время положения, что каждая непрерывная протяженная величина актуально делима до бесконечности, а также из логически следующего отсюда разделения реально существующих в природе величин на протяженные и непротяженные. Это иногда объясняют тем, что в тот период «геометрия как физика» еще не отделилась от «геометрии как математики».

Некоторые из выводов, которые вытекают из анализа апорий, впервые были сформулированы в виде научных положений в трудах В. И. Ленина. Движение, по словам В. И. Ленина, «есть единство непрерывности (времени и пространства) и прерывности (времени и пространства). Движение есть противоречие, есть единство противоречий»[3]. Действительный смысл апорий и связанных с ними концепций, согласно В. И. Ленину, нужно искать не в том, существует или нет дви-

2 E. Zeller, Die Philosophie. der Griechen, Leipzig, 1896.

3 В. И. Ленин. Полное собрание сочинений, т. 38, с. 253.

жение, а в том, как выразить его в «логике понятий». Там же, в «Философских тетрадях», В. И. Ленин отмечает, что «мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движение, не прервав непрерывного, не упростив, огрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью всегда есть огрубление, омертвление, – и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и любого понятия»[1]. Тем более невозможно отобразить движение при помощи каких-либо математических или физических абстракций или формул, каким-нибудь образом не остановив его, не обратившись к его противоположности – покою. Таким образом, апории Зенона не доказывают невозможность движения, а показывают его диалектическую сущность. Противоречия, возникающие при попытке осмыслить движение, относятся не к числу формально-логических, а к числу диалектических и являются отображением тех противоречий, которые лежат в самой сущности явлений. И то, что элеаты считали основой для утверждения о невозможности, нереальности движения, на самом деле является необходимым условием его существования.

Наибольшей известностью из всех пользуется апория «Ахиллес» (или «Ахиллес и черепаха»), смысл которой сводится к следующему. Пусть Ахиллес находится на каком-то расстоянии позади черепахи, и они одновременно начинают движение вперед. Пока Ахиллес пробежит расстояние, отделяющее его от черепахи, она успеет отползти от этого места вперед на какое-то расстояние; пока Ахиллес будет проходить это новое расстояние, отделяющее старое местопребывание черепахи от нового, она проползет еще какой-то очень малый путь и т. д. до бесконечности. Так как на прохождение определенного расстояния у Ахиллеса всегда уходит какой-то ненулевой отрезок времени, а за

1 В. И. Ленин. Полное собрание сочинений, т. 38, с. 255.

это время черепаха успевает продвинуться вперед, то самое быстрое в античной мифологии существо не может догнать самое медлительное.

Из полученного в апории противоречия Зенон приходит к заключению, что не существует различия скоростей (в противном случае более быстрое должно было бы догнать и перегнать более медленное), а, следовательно, не существует и скорости вообще. Следовательно, не существует и движения, поскольку любое движение необходимо характеризуется скоростью.

Существует тесная связь между апорией «Ахиллес» и другой, которая называется «Дихотомия» (деление на два). Рассмотрим отрезок **AB**. Предмет двигается из **A** в **B**. Прежде чем пройти весь путь, предмет должен пройти его половину **AC**; для того, чтобы пройти оставшуюся половину **CB**, он должен пройти сперва половину этой половины **CD**, затем **DE**, затем **EF** и т. д. до бесконечности.[2]

Выражаясь математическим языком, последовательность отрезков стремится к точке **B**, но никогда ее не достигает; остаток пути представляет собой бесконечно малую величину. Таким образом, движение никогда не сможет закончиться, предмет никогда не достигнет точки **B**.

Гегель в своих «Лекциях по истории философии» дает другую интерпретацию «Дихотомии», по которой движение не может не то чтобы закончиться, оно не сможет никогда даже начаться. Действительно, прежде чем пройти половину отрезка пути, тело должно пройти половину этой половины, но перед этим оно должно пройти ее половину и т. д. до бесконечности. Мы никогда не сможет сказать, что движение началось, т. к. начать двигаться означает сдвинуться с места, т. е. пройти какой-то путь; а до этого ведь надо пройти половину этого пути, и снова регресс в бесконечность.

2 В таком духе передает содержание этой апории Аристотель в «Физике».

Нам представляется, что последняя интерпретация лучше служит замыслу самого Зенона, если только он действительно ставил себе целью опровергнуть реальность движения, т. к. в первом случае (так же как в апории «Ахиллес») движение все же происходит, а в последней интерпретации ни о каком движении не может быть и, речи, т. к. тело не в состоянии сдвинуться с места.

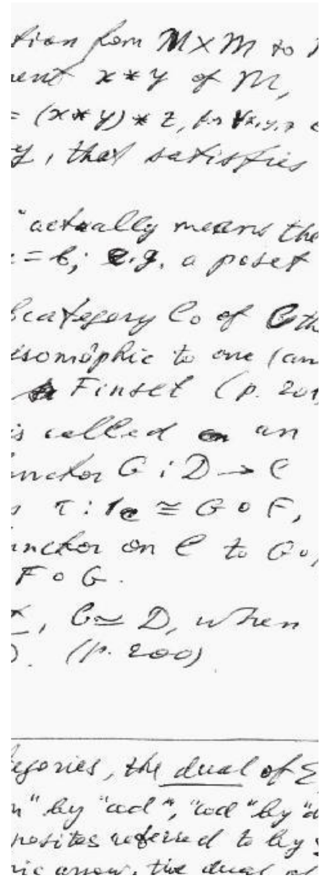
Две рассмотренные выше апории можно рассмотреть, как два варианта одной и той же (движение предмета к цели), в первом из которых не достигается движущаяся цель (черепаха), а во второй – неподвижная (конец пути – точка **B**). Одним из основных моментов в логических построениях Зенона является условие бесконечной делимости пространства и времени, непосредственно следующее из постулирования их непрерывности. В этом предварительном условии усматривали корень зла уже современники Зенона, которым трудности апорий казались непреодолимыми.

Попытку вывести древнюю науку из созданного апориями Зенона кризиса сделал Демокрит, отвергнувший предпосылку безграничной делимости мира и развивший учение о неделимых атомах. Но признание существования неделимых атомов[1] не снимает тех парадоксов Зенона, которые основаны именно на этой предпосылке.

Это становится ясным при рассмотрении апории «Стрела». Пусть время состоит из неделимых моментов (атомов времени), а пространство – из неделимых точек (атомов пространства). Рассмотрим летящую стрелу. В течение каждого неделимого момента времени («теперь») острие стрелы находится в определенной точке пространства («здесь»), В это «теперь» стрела не может двигаться, иначе неделимое «теперь» разделилось бы на части, соответствующие различным

1 В результате чего Демокрит, по мнению многих исследователей, не разрешил проблему, а просто обошел ее.

положениям тела при движении. Поскольку весь промежуток времени представляет собой последовательность дискретных «теперь», в каждом из которых тело покоится, то движение будет суммой состояний покоя (характеристика метафизического понимания движения как «суммы состояний покоя» принадлежит В. И. Ленину; см. § 3 настоящей главы), а сумма состояний покоя есть состояние покоя. Следовательно, летящая стрела неподвижна.



Таким образом, поставив делимости времени и пространства предел в виде атомов, мы сталкиваемся с не меньшими трудностями, чем те, к которым приводит допущение их бесконечной делимости. Кроме того, тут возникает новая проблема: протяженными или непротяженными являются атомы времени и пространства? Непротяженные моменты времени являются не частями времени, а исключением времени (это заметил еще Аристотель; см. § 2), отрезок длительности не Может слагаться из непротяженных моментов. С другой стороны, мы не можем допустить существование протяженных неделимых атомов. В этом мы убедимся, рассмотрев последнюю из рассматриваемой группы апорий, которая в литературе получила названия «Стадий», «Ристалище», «Состязание».

Существует множество интерпретаций этой апории. Мы изложим этот аргумент так, как его излагает С. А. Яновская, т. к. эта интерпретация отличается от других простотой, ясностью и лучше проиллюстрирует нашу мысль.

«Пусть время состоит из неделимых протяженных атомов. Представим себе на противоположных концах ристалища двух бегунов, настолько быстрых, что на пробег от одного до другого конца ристалища каждому из них требуется один только атом времени. И пусть оба одновременно выбегают с противоположных концов. Когда произойдет их встреча0, неделимый атом времени разделится пополам, т. е. в атомы времени тела не могут двигаться...»[1].

Прежде чем перейти к изложению аргументов Зенона против множественности вещей в природе, следует привести два положения, которые исходили из разделения всех величин на протяженные и непротяженные и считались, по мнению древних основными аксиомами математики. С. Я. Лурье считает, что эти положения сыграли роковую роль в истории древнегреческой математики[2].

«1. Сумма бесконечно большого числа любых, хотя бы и чрезвычайно малых, протяженных величин обязательно должна быть бесконечно большей...

2. Сумма любого, хотя бы и бесконечно большого, числа непротяженных величин всегда равна нулю и никогда не может стать равной некоторой, заранее заданной, протяженной величине...»[3].

Следует отметить, что два вышеприведенных положения играют «роковую роль» не только в аргументах против множественности вещей (которых мы коснемся ниже), но имеют непосредственное отношение и к аргументам против движения, например, к «Ахиллесу» и «Дихотомии». Если бесконечно большая сумма сколь-угодно малых протяженных вели-чин непременно должна быть бесконечно большой, то и место встречи Ахиллеса с черепахой и точка **B** в «Дихотомии» будут бесконечно удаленными точками. Таким образом, любой конечный отрезок становится бесконечным, стоит только нам определенным образом разбить его на части. В случае справедливости первой аксиомы приведенные Зеноном аргументы против движения были бы просто излишними, т. к. любая проведенная на сколь-угодно близком расстоянии от движущегося предмета линия была бы для него недостижимой (бес-

1 С. А. Яновская. Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «апорий Зенона», Проблемы логики (Сб) М., 1963. с. 127.

2 С. Я Лурье. Теория бесконечно малых у древних атомистов, М.,–Л., 1935, с. 31.

3 Там же, с. 31–32.

конечно удаленной). Абсурдность подобной ситуации дает основания С. А. Яновской утверждать, что Зенон не мог разделять такое нелепое положение, как первая аксиома (хотя это и не соответствует историческим сведениям).

Чтобы сначала же внести ясность, отметим, прежде всего, что первая аксиома представляет собой от начала до конца ложное положение. В качестве иллюстрации рассмотрим тот бесконечный ряд, который мы имеем в «Дихотомии».

Если AB= 2, а $AC = \frac{1}{2} \times AB = 1$, то получим: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

Этот ряд представляет собой бесконечную сумму безгранично уменьшающихся с увеличением и конечных членов, но сумма этого ряда не $+\infty$, а 2.

Вместе с тем необходимо отметить, что отрицание первой аксиомы не разрешает полностью трудностей, связанных с апориями, как не способен их разрешить, вопреки распространенному мнению, и весь аппарат математического анализа (этот вопрос будет разобран ниже).

Опираясь на две вышеприведенные аксиомы, Зенон выдвигает аргумент против множественности вещей. Если природа действительно существует, то она представляет собой множество вещей и обладает протяженностью. Но отсюда Зенон заключает, что в таком случае природа должна одновременно обладать бесконечной протяженностью и нулевой протяженностью, что невозможно. Между каждыми двумя протяженными величинами, рассуждает Зенон, всегда находится третья протяженная величина, их граница[4] (в противном случае эти две величины слились бы в одну); между первыми двумя и этой третьей величиной находятся две новые величины и т. д. до бесконечности. Получа-

4 Не надо забывать, что элейцы отрицали существование пустого пространства, объявляя его небытием.

ется, что если бытие множественно, то оно состоит из бесконечного числа протяженных величин. Какой бы малой ни была каждая величина, бесконечно большая сумма их даст нам бесконечно большое целое. Из этого рассуждения немедленно следует абсурдное заключение, что любая конечная величина бесконечно велика (Интересно, учитывал ли такую возможность Зенон).

В то же время, «нечто, имеющее величину, нельзя мыслить множественным, так как тогда необходимо придется мыслить его состоящим из неделимых частей (каждое мыслимое множество элементов есть в этом смысле множество неделимых единиц, о делимом до бесконечности нельзя говорить как о «многом»; существование сложного необходимо предполагает существование чего-то простого – Г. Х.); а последние, не имея совсем величины (все, что имеет величину, делимо до бесконечности; это показано в «Стадии» – Г. Х.), ни в каком количестве не могут дать целого, имеющего величину»[1]. Даже бесконечно большая сумма непротяженных частей не может дать протяженной величины.

Относительно первой части этой апории мнение большинства исследователей сводится к тому, что она базируется на ложной первой аксиоме и постольку представляет лишь исторический интерес. Однако необходимо отметить, что рассуждение Зенона имеет смысл лишь в том случае, если материя бесконечно делима, т. е. если к любым сколь угодно малым частицам материи применима процедура деления и если все они необходимо обладают протяженностью. Эта неявно принимаемая Зеноном предпосылка его рассуждений представляет собой не только исторический интерес.

В связи с бурным развитием в двадцатом веке атомной физики остро встал вопрос о структуре микрочастиц. Согласно одному из фундаментальных законов диалектики – закону перехода количественных измене-

1 С. А. Богомолов. Актуальная бесконечность (Зенон Элейский, Ис. Ньютон, Г. Кантор), М.-Л., 1934, с. 36.

ний в качественные, применение какой-либо количественной операции к объекту при неограниченном ее повторении должно, в конце концов, привести к коренным качественным изменениям в объекте. Проникновение вглубь материи выявляет наличие качественно отличающихся друг от друга уровней, а на субатомном уровне свойства материи изменяются настолько, что некоторыми учеными ставится проблема правомерности понятий протяженности, структурности, делимости в применении к элементарным частицам.

Что касается второй части переданной выше апории, то вопрос о справедливости проводимого Зеноном рассуждения упирается в вопрос о справедливости второй аксиомы. Возможно ли получить из не имеющих измерений точек протяженную величину? Ведь сколько раз не складывай ничто никогда не получишь что-то! В качестве ответа на аналогичный вопрос проф. С. А. Богомолов отмечает: «Геометрия строит свои непрерывные образы из неделимых элементов (точек) и достигает блестящих результатов»[2]. Но между точками и телами в данном случае имеется существенная разница: протяженные тела являются для нас очевидной реальностью, в то время как точка представляет собой математическую абстракцию. «Построение (хотя бы теоретическое) реально существующего тела из абстрактных точек, естественно, вызвало возражение у некоторых материалистически мыслящих математиков и философов. Так, Н. И. Лобачевский считал необходимым положить в основу геометрии не точку, а тело, и определял точку как пару тел, определенным образом соприкасающихся друг с другом»[3]. В связи с этим С. А. Яновская отмечает, что, действительно, «тело» является абстракцией более низкого порядка, чем «точка», т. к. можно показать конкретное тело, но нельзя показать непротяженную точку[4].

2 С. А. Богомолов. Цит. соч., с. 39.

3 См.: С. А. Яновская. Цит. соч., с. 122.

4 Там же, с. 135, прим. 9.

С. А. Богомолов считает, что непрерывные тела можно рассматривать состоящими из непротяженных точек; по его мнению, здесь «на первое место выступает идея порядка; она сообщает то единство множеству элементов, которое характеризует континуум; благодаря ей, целое получает свойства, отсутствующие у частей его»[1]. Получается, что стоит нам взять точки в таком количестве, чтобы получить мощность континуума, определенным образом упорядочить их, и перед нами предстанет непрерывная протяженная величина.

В математике утверждения, подобные тому, что любая конечная часть отрезка равномощна всему отрезку, предполагают, что отрезок состоит из точек. Между тем, несмотря на то, что построение идеального отрезка из идеальных точек на первый взгляд не противоречит принципам классических математических теорий, трудности в обосновании идеи непрерывности (континуума) в математике связаны именно с правомерностью подобного построения (в 4-ом параграфе главы анализируется вопрос о том, правомерно ли говорить о построении континуума как актуально бесконечного множества точек). Таким образом, рассуждение С. А. Богомолова не является очевидным даже в пределах «чистой» математики. Подобные трудности повлияли на формирование аксиоматических систем в геометрии (система Гильберта, например, принимает одновременно существование трех систем объектов: точек, прямых и плоскостей).

С. А. Богомолов дает пример отрезка, разложенного на актуально бесконечное множество частей, но, во-первых, эта модель заранее принимает, что отрезок «представляет собой не что иное, как известную совокупность точек»[2], а, во-вторых, возможность разложения, это еще не возможность построения. Дело в том, что любая протяженная величина мысленно делима

1 С. А. Богомолов. Цит. соч., с. 41.

2 С. А. Богомолов. Цит. соч., с. 57 (Приведя этот пример, С. А. Богомолов ошибочно считает, что опроверг Э. Целлера, утверждающего, что на самом деле нельзя разложить часть пространства или протяженную величину на актуально бесконечное число частей).

до бесконечности (хотя мы не можем представить ее уже разделенной, так как в потенциально бесконечном процессе не существует последнего этапа, процесс принципиально незавершаем), но мы не имеем никакого права совершить (даже мысленно) обратный процесс, т. к. принципиально невозможно установить, откуда он должен начаться.

Точку можно рассматривать как предел деления отрезка, но предел актуально недостижимый. Математика давно решительно и окончательно отказалась от концепции актуально бесконечно малых. И тем более не может быть речи об экстраполяции методов абстрагирования, непротиворечивых в пределах геометрии или математического анализа, на эмпирические науки. Следовательно, вторая аксиома продолжает оставаться в силе, если выйти из сферы чистой математики[3]. Рассуждения Зенона с логической точки зрения гораздо более безупречны, чем рассуждения многих его современных исследователей, теории которых основаны на смешении эмпирических и идеализированных математических объектов[4].

Поскольку ложность первой аксиомы не вызывает сомнений (чего никак нельзя сказать о второй), то в результате отбрасывания ложных предпосылок в логических рассуждениях Зенона снимается апория в целом, несмотря на то, что анализ второй части рассуждения сталкивается со значительными трудностями, некоторых из которых мы коснулись выше.

Вторая апория Зенона против множественности вещей сводится к тому, что количество составляющих бытие единиц одновременно должно быть и ограниченным и безграничным.

Ограниченным оно будет потому, что объектов в мире есть столько, сколько их есть, не больше и не меньше. (Видимо, Зенон считал, что определенное

3 Вопреки мнению С. Я. Лурье, согласно которому обе аксиомы давно и окончательно отвергнуты наукой.

4 Анализ некоторых подобных концепций можно найти в цитируемой ниже работе Ю. А. Петрова.

количество предметов может быть только ограниченным). Безграничным же это число будет потому, что между двумя единицами, как бы жестко они ни были связаны, всегда находится третья величина, их граница (а, следовательно, и бесконечное множество таких величин) и т. д. до бесконечности.

В результате первой части рассуждения мир предстает в виде определенного, актуально данного (а, следовательно, завершенного) множества объектов, количество которых ограничено, поскольку оно определенно. В то же время в результате второй части рассуждения количество объектов в мире неопределенно, т. к. вопрос об установлении этого количества сводится к никогда не завершаемому потенциально бесконечному процессу.

Из первой части апории непосредственно следует, что количество объектов в мире может быть (если не практически, то хотя бы теоретически) пересчитано, в то время как вторая ее половина утверждает принципиальную невозможность подобного процесса.

В заключение отметим, что, как показал Г. Кантор, определенность множества элементов вполне совместима с бесконечностью количества элементов множества. Кроме того, многие трудности, связанные с апориями, вызваны неправомерным представлением об актуально бесконечном множестве, как результате завершения потенциально бесконечного процесса, который, как известно, не может быть завершен. Однако, не отрицание идеи бесконечности, предлагаемое часто в качестве панацеи, а допущение существования актуально бесконечного множества независимо от потенциально бесконечного процесса пересчета его членов является необходимой предпосылкой для исследования многих трудностей, связанных с апориями.

§ 2. ОТНОШЕНИЕ АРИСТОТЕЛЯ К АПОРИЯМ И СВЯЗАННЫМ С НИМИ ПРОБЛЕМАМ

Гегель в свое время сказал, что антиномии Канта не идут дальше того, что в этой области сделал уже Зенон. Мы не будем здесь разбирать вопрос о справедливости этого утверждения. Но на манер Гегеля мы можем сказать, что решения апорий, предлагаемые многими из наших современников, не идут дальше того, что в этой области сделал уже Аристотель.

Аристотель считал аргументы Зенона настолько серьезными, что уделил им значительное место в «Физике». Проанализировав возможность бесконечной делимости пространства и времени, на которой базируется «Дихотомия», Аристотель пришел к заключению, что «бесконечного в количественном отношении нельзя коснуться в ограниченное время, бесконечного согласно делению – возможно, так как само время в этом смысле бесконечно. Следовательно, приходится проходить бесконечность в бесконечное, а не в ограниченное время и касаться бесконечного множества частей бесконечным, а не ограниченным множеством»[1]. Поэтому Зенон неправ, говоря, что бесконечное множество частей, получаемое в результате бесконечного деления конечного отрезка, нельзя пройти в конечное время (так как промежуток времени сам делим до бесконечности). Более того, из концепции Аристотеля непосредственно следует, что между бесконечными множествами отрезков, получающихся в результате бесконечного процесса деления промежутка времени и отрезка пути, можно установить взаимно однозначное соответствие. Поэтому, для того, чтобы пройти, коснуться или пересчитать бесконечное число объектов, совсем не требуется бесконечного времени, и апория, казалось бы, разрешается.

1 Аристотель. Физика, 233a.

По нашему мнению, приведенный аргумент Аристотеля не только не снимает апорий, но гораздо более уязвим с логической точки зрения, чем сами апории Зенона[1]. Зенон рассматривает движение реальных физических объектов, поэтому действительной, самой главной трудностью, в которую упирается любой анализ подобного процесса, является невозможность актуального прохождения бесконечного количества частей (появляющихся в процессе последовательного деления) реальным телом. Этот процесс аналогичен процессу пересчета бесконечного количества предметов, который разумеется, не под силу реальному человеку. Более того, такой процесс вообще не может быть завершен (даже если абстрагироваться от существующих материальных возможностей).

Аргумент Аристотеля имеет решающее значение для решения математического аспекта апорий. Как известно, математическая сторона апорий Зенона полностью формализуема. Но авторы, использующие математические интерпретации апорий, зачастую впадают в заблуждение, побеждая Зенона «детским матом». Они вычисляют время и расстояние, которое необходимо пройти, чтобы достичь цели, при помощи формулы суммирования геометрической прогрессии (не говоря уже о тех, кто применяет тяжелую артиллерию в лице теории сходимости бесконечных рядов). Ответ, разумеется, получается безукоризненный.

В ответ на подобные «решения» апорий хотелось бы заметить, что не только формула суммы сходящегося ряда дает ответ на вопрос, где встретятся Ахиллес и черепаха, но и метод «исчерпаний», знакомый еще современникам Зенона. Аристотель, который жил целое столетие спустя, не уделил бы столько внимания апориям, если бы они были так легко разрешимы[2]. Проблема не

1 К логическим достоинствам апорий следует отнести и то, что в них Зенон применил (по мнению некоторых специалистов, впервые в истории иауки) метод доказательства от противного.

2 Пример вычисления при помощи метода исчерпаний приведен в книге: Ю. А. Петров. Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости. М., 1967, с. 73, 74.

в том, когда, где, а как возможна встреча Ахиллеса с черепахой, и, вообще, как возможно движение.

Бесконечность является самым мощным оружием математики. Она необходима, чтобы сделать разрешимым то, что иначе осталось бы неосуществимым. Любой переход к пределу, суммирование сходящегося ряда – все это скачок через бесконечность, через бесконечное множество значений. Он необходим для получения нужного результата, но весь подобный процесс представляет собой идеализацию. Идеализацию представляет собой и рассмотрение движения тела в виде последовательного прохождения бесконечного множества отрезков пути. Путь в действительности не состоит из отрезков, он становится таковым в результате мысленного процесса. Поэтому вопрос, достигнет ли реально движущееся тело своей цели, если движение рассматривается идеализированное, неправомерен. В этом случае правомерным было бы рассмотреть идеализированное достижение предметом своей цели, что совершенно не требует реального существования последнего проходимого предметом отрезка пути, содержащего конечную точку. Здесь простое существование предела и принадлежность его последовательности достаточно для идеализированного достижения предметом (тоже идеализированным) своей цели. Но на все подобные рассуждения Зенон мог бы ответить, что они не снимают основной трудности его апорий: для любого движения необходимо пройти бесконечность, бесконечное множество (это относится и к пути, и ко времени) и весь вопрос в том, как его возможно пройти.

Аристотель понимал недостаточность предложенного им решения апорий: «Но такое разрешение достаточно для ответа тому, кто так поставил вопрос[3], а для сути дела и для истины недостаточно»[4]. Движе-

3 Спрашивалось ведь, можно ли в ограниченное время пройти или сосчитать бесконечно многое.

4 Аристотель. Физика, 263a.

ние есть непрерывный процесс; движение предмета к цели и достижение им последней не вызывает сомнения, но любая попытка представить движение в виде прохождения бесконечной последовательности точек или отрезков пути делает движение невозможным. «Кто делит непрерывную линию на две половины, тот пользуется одной точкой как двумя, так как он делает ее началом (второй половины – Г. Х.) и концом (первой половины – Г. Х.). Так поступает тот, кто считает, и тот, кто делит пополам. При таком делении ни линия, ни движение не будут непрерывными, так как непрерывное движение есть движение по непрерывному, а в непрерывном заключается бесконечное число половин, но только не актуально, а потенциально. Если же их считать действительными, то движение не будет непрерывным, а будет останавливаться, что вполне очевидно произойдет с тем, кто считает половины»[1]. В приведенном рассуждении Аристотель проливает свет на причину, порождающую апории и делающую цель недостижимой. Именно здесь, но нашему мнению, нужно искать ключ к разрешению апорий «Ахиллес» и «Дихотомия».

Из многочисленных попыток решения апорий, предложенных за последние годы, нам хотелось бы кратко остановиться на концепции С. Куана, которая использует приведенные выше выводы Аристотеля и, кроме того, существенно отличается от всех других концепций. С. Куан относится к числу авторов, выделивших в апориях Зенона т. н. «драматический» аспект, основная цель которого – дать интерпретацию апорий и разрешение их без использования идеи бесконечности, которая во все времена считалась основной причиной апорий и рожденных ими проблем.[2]

С. Куан выдвигает в качестве основной проблему совсем иного плана: возможно ли достигнуть цель,

1 Аристотель. Физика, 263а

2 Решение парадоксов на основе парадоксальной в своей сущности идеи бесконечности многим и по сей день представляется невозможным.

если мы постоянно вмешиваемся в процесс достижения объектом своей цели и постоянно выдвигаем все новые условия для этого, как это делает Зенон в «Ахиллесе» и «Дихотомии». С. Куан показал, что, во-первых, Зенон в процессе движения каждый раз заменяет первоначальную цель новой; предварительной целью, что достигается путем изменения того способа движения, который был избран вначале, на новый способ, а также заставляет читателя постоянно совершать мысленный скачок с пространства на время и обратно (аргументы, выдвинутые С. Куаном), а во-вторых, Зенон постоянно останавливает движение, так что оно делается прерывистым, поэтому он уже не имеет права использовать безграничную делимость пространства и времени, которая основана на предпосылке их непрерывности (аргумент, восходящий к Аристотелю)[3].

Отсюда, между прочим, следует и то, что Ахиллес не догонит черепаху не только теоретически, но и в реальности, если заставить его двигаться так, как это делает Зенон. Б. Рассел пишет, что «если бы на пути бегуна были помечены половина, три четверти, семь восьмых и т. д. и бегун не имел бы права пройти какую-либо из этих вех, пока рефери не скажет: «Теперь!», тогда заключение Зенона было бы справедливо на практике и бегун никогда бы не достиг цели»[4].

К слабым сторонам концепции Куана относится его утверждение о том, что выбор способа разбиения пути, предложенного Зеноном в «Дихотомии» (т. е. деление оставшегося отрезка пути пополам), не имеет никакого преимущества перед способом, предложенным самим Куаном, который заключается в прохождении равных отрезков пути, что очень легко позволяет объекту достичь целевой точки. От способа разбиения пути и выбора способа движения, действительно, зависит многое, но выбор Зеноном дихотомического способа

3 Stanislaus Quan, The Solution of the Achilles Paradox, «Review of Metaphysics», 1963, Vol. 16, № 3. Idem: S. Quan, The Solution of Zeno's First Paradox, «Mind», 1968, Vol. 77, № 306, p. p. 206–221.

4 B. Russell, Our Knowledge of the External World, L, 1952, p. 187.

деления имел важную психологическую и логическую основу, которую Куан, исследующий апории в «драматическом» (т. е. психологическом) аспекте, не должен был оставить без внимания.

Куан считает, что апории не имеют ничего общего с бесконечностью. Ни расстояние, ни время, ни движение, ни цель не бесконечны и не указывают на какую-либо связь с бесконечностью. «Но что же является ответственным за то, что наш разум приходит в контакт с «бесконечностью»? Контакт с «бесконечностью» возникает тогда, когда мы останавливаемся в точках деления и смотрим на ту часть пути, которую нам всегда остается пройти»[1]. Но ведь то, о чем говорит Куан, есть потенциально бесконечный процесс! Кроме того, бесконечным является и процесс подмены первоначально поставленных условий движения новыми, делающий достижение цели невозможным. Пример концепции С. Куана лишний раз доказывает, что в апориях понятие бесконечности играет решающую роль.

Другой связанной с апориями проблемой, на которую обратил внимание Аристотель и которая также вытекает из допущения Зеноном бесконечной делимости пространства и времени, является проблема перехода из покоя в движение и обратно, т. е. проблема начала движения и остановки. Рассуждение Аристотеля сводится к тому, что невозможно установить, где кончился покой и началось движение, т. к. для каждого «первого» момента движения найдется еще более «первый» (опять-таки из-за бесконечной делимости времени). «Причиной этого является то, что все покоится и движется во времени, а во времени первого нет, как нет и первого в величине и вообще во всем непрерывном, так как все это делимо до бесконечности».[2] На первый взгляд, в словах Аристотеля не содержится ничего нового; он лишь повторяет те выводы, к которым уже при-

1 S. Quan, The Solution of Zeno's, First Paradox, p. 215.

2 Аристотель. Физика, 239a.

шел Зенон в «Дихотомии». Но более глубокий анализ этого места в «Физике» показывает, что здесь Аристотель дал попытку научного обоснования той диалектической трудности, которую открыл Зенон.

Основной вывод, непосредственно вытекающий из рассуждений Аристотеля, состоит в том, что тот переход из покоя в движение, который на чувственном этапе познания представляется скачком, подчас моментальным, на самом деле является непрерывным процессом, в котором нет первого и последнего моментов, несмотря на то, что весь процесс ограничен во времени. Несуществование первого и последнего моментов не иллюзия, возникающая на уровне ощущений; принципиальная невозможность их следует из рассмотрения этих моментов в виде не имеющих измерений объектов, которых в реальности не существует.

Во время анализа апории «Стрела» Аристотель формулирует один из своих главных выводов, что «время не слагается из неделимых «теперь», а также и никакая другая величина»[3]. Слова Аристотеля вполне можно распространить и на «точки» пространства. Из выводов Аристотеля следует, что любая попытка рассмотреть реальное пространство и время состоящими из точек (протяженных или непротяженных) а реальное движение в виде последовательности дискретных шагов, неминуемо заводит в тупик. Любая протяжения «точка» делима и получаем регресс в бесконечность со всеми вытекающими отсюда последствиями, а непротяженная точка не является частью пространства (времени) и не имеет ничего общего с протяженными величинами.[4]

Аристотель допускал безграничную делимость пространства и времени, которая является одной из основных предпосылок двух первых апорий: «Я разумею под непрерывным то, что делимо на всегда делимые

3 Там же.

4 Эти трудности способствовали возникновению философии интуиционизма А. Бергсона, где время, пространство и движение представляют собой не подлежащие логическому анализу интуитивно данные цельные сущности.

части; при таком предположении время должно быть непрерывным»[1]. Никакая величина не может состоять из неделимых частей, т. к. любая величина непрерывна, а непрерывное делимо на всегда делимые части.

Далее Аристотель приводит определение непрерывности, которое можно было бы назвать «качественным», если приведенное выше определение считать «количественным»: «...Свойство всякого непрерывного таково, что между границами находится нечто одноименное»[2]. Следовательно, непрерывность Аристотель связывал с однородностью, с сохранением определенного качества в определенных границах. В таком случае дискретность пространства, времени или движения означает дискретность не только в количественном, но и в качественном смысле.

В апории «Стрела» Зенон рассматривает дискретное движение в дискретных точках пространства и времени, и в этом его ошибка. Этим дело не ограничивается. Зенон фактически ничего не говорит о движении. С самого начала и то конца своего рассуждения он ни разу не рассматривает движение стрелы. Он рассматривает лишь «состояния покоя», сумма которых может дать опять-таки лишь состояние покоя. Но здесь кроется еще одна ошибка Зенона: он вообще не имеет права утверждать, что стрела в данной точке времени и пространства («здесь» и «теперь») находится в состоянии покоя, «так в момент «теперь» невозможно ни двигаться, ни покоиться...»[3]. Таким образом, Зенон не имеет права рассматривать точечное, мгновенное состояние как покой. Точек не существует, поэтому не существует ни движения, ни покоя в точке (имеются в виду точки как неделимые непротяженные объекты, которые являются идеализациями). Этим нейтрализуется одна из основных предпосылок, на которых строит свое рассуждение Зенон. На основе концепции

1 Там же. 232а.

2 Аристотель. Физика, 234а.

3 Там же, 239в.

Аристотеля фактически разрешаются апории «Стрела» и «Стадий», но не разрешаются проблемы, рожденные апориями. Одной из них является проблема соотношения непрерывности и дискретности пространства и времени, а также проблема движения в микромире, что воскресило интерес ученых к апории «Стрела» как прототипу тех трудностей, с которыми сталкиваются современные ученые. Что касается апорий «Ахиллес» и «Дихотомия», то, по нашему мнению, аргументы, высказанные Аристотелем, не являются достаточными для их разрешения.

Основным источником трудностей, связанных с этими, наиболее сильными апориями, Аристотель считал актуальную бесконечность. Вслед за другими античными философами Аристотель актуально существующее бесконечное понимал либо как бесконечный (в отношении величины, границ) протяженный объект, либо как результат доведения до конца бесконечного процесса дробления материального объекта, и на основе такого понимания актуальной бесконечности пришел к ее отрицанию вообще.

Нет бесконечности в наличии, но есть бесконечность в «потенции», в возможности. Аристотель пишет (имея в виду сторонников актуальной бесконечности): «Выходит, однако, что бесконечное противоположно тому, что они говорят: не то, вне чего ничего нет, а то, вне чего всегда есть что-нибудь, то и есть бесконечное... Итак, бесконечное имеется там, где, беря известное количество, всегда можно взять что-нибудь за ним»[4]. В результате принятия концепции потенциальной бесконечности Аристотель приходит к выводу, что не конечное охватывается и определяется бесконечным, а наоборот, бесконечное охватывается и определяется конечным (которое понимается как целостность). «Ведь мы именно так и определяем целое: это то, у которого

4 Аристотель. Физика, 207а. Следует отметить, что здесь у Аристотеля фактически сформулировано свойство ограниченности (!) объектов.

ничто не отсутствует...»[1]. Ниже Аристотель пишет, что «бесконечное скорее подходит под определение части, чем целого, так как материя есть часть целого, как медь для медной статуи»[2].

Несмотря на глубокие диалектические идеи, высказанные Аристотелем в отношении сущности бесконечного и связи конечного с бесконечным, отказ от актуальной бесконечности, который определил отрицательное отношение к идее бесконечности многих последующих поколений ученых, не привел Аристотеля к желаемому результату, и в частности, к разрешению трудностей, связанных с апориями против движения. Мы постараемся показать это на примере апорий «Ахиллес» и «Дихотомия».

В апориях фигурирует как актуальная, так и потенциальная бесконечность. Например, чтобы достигнуть цели в «Дихотомии», необходимо пройти актуально бесконечное множество отрезков пути (вследствие чего цель и является недостижимой). Противоречиво и бессмысленно рассматривать путь как бесконечную совокупность непротяженных точек, полученную в результате доведения до конца бесконечного процесса дробления отрезка пути, но вполне возможно теоретически рассмотреть все этапы, которые необходимо пройти объекту для достижения цели, как актуально бесконечное множество (область изменения значений некоторой функции).

Однако оставим любую попытку рассмотрения бесконечности в форме актуальной и ограничимся потенциальной бесконечностью в аристотелевском понимании. Присматриваясь к формулировке апорий, мы убеждаемся, что потенциальная бесконечность у Зенона является таким же источником противоречий, как и актуальная. Действительно, именно потенциальная бесконечность не позволяет Ахиллесу догнать че-

1 Там же.

2 Там же.

репаху, т. к. в конце каждого этапа Ахиллеса отделяет от черепахи отличный от нуля отрезок пути и всегда необходимо дальнейшее продолжение движения, никогда не приводящего к цели. Таким образом, бесконечность в потенции является вполне достаточной для возникновения парадоксов движения, и даже такая радикальная мера, как отказ от актуальной бесконечности, не спасает от подобных трудностей.

§ 3. ДИАЛЕКТИКА И МЕТАФИЗИКА В ОТРАЖЕНИИ СОЗНАНИЕМ РЕАЛЬНОГО КОНТИНУУМА И ДВИЖЕНИЯ

Зенон ставил своей целью опровержение реальности атрибутов природы, и, открыв их противоречивость, считал свою цель достигнутой. Аристотель исходил из существования эмпирической реальности как факта и пытался научно проанализировать его. Аристотель также сталкивался с трудностями и противоречиями, но его рассуждения и выводы (материалистические в своей основе) представляют собой первую попытку заменить негативную диалектику Зенона позитивным подходом к проблеме. Аристотель не был последовательным диалектиком и не смог создать диалектической концепции движения. Разрешить эту задачу в полной мере оказалось не под силу даже великому диалектику нового времени Гегелю.

Согласно концепции Гегеля, «двигаться означает быть в данном месте и в то же время не быть в нем, следовательно, находиться в обоих местах одновременно»[3]. Это «определение» движения сыграло значительную роль в борьбе с метафизическими представлениями: его используют и классики марксизма. Ф. Энгельс пишет в «Анти-Дюринге»: «Движение само есть противоречие; уже простое механическое перемеще-

3 Гегель. Сочинения, т. IX, М., 1932, с. 241.

ние может осуществиться лишь в силу того, что тело в один и тот же момент времени находится в данном месте и одновременно в другом, что оно находится в одном и том же месте и не находится в нем. А постоянное возникновение и одновременное разрешение этого противоречия– и есть именно движение»[1].

Вместе с тем приведенная гегелевская трактовка не может считаться диалектическим решением проблемы, а опять же указывается на логическую противоречивость движения, определенного через покой, о чем свидетельствует участие в ней понятия «находиться в данном месте» (т.е. покоиться!). Все классические теории пытались определить движение, свести его к чему-то другому, более понятному, элементарному (каковым и представляется метафизическому мышлению покой) и этим делали проблему неразрешимой. Однако, становясь на диалектическую точку зрения, сразу становится ясной невозможность редуцировать или «обосновать» движение. Приведя слова Гегеля о том, что взаимодействие является истинной ***causa finalis*** всех вещей, Ф. Энгельс пишет: «Мы не можем пойти дальше познания этого взаимодействия именно потому, что позади его нечего больше познавать»[2]. Следовательно, решающим шагом на пути к диалектическому пониманию движения должно стать Признание его первичности и абсолютности как атрибута реальности. В теоретических рассуждениях движение необходимо вводить аксиоматически.

В. И. Ленин в «Философских тетрадях» рассматривает метафизическую концепцию Чернова, согласно которой «движение есть нахождение тела в данный момент в данном месте, в другой, следующий момент в другом месте», и показывает, что она страдает теми же недостатками, что и античное представление о движении. Прежде всего, в метафизических концепциях,

1 К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. 20, с. 123.

2 Там же, с. 546.

подобных концепции Чернова, под «данным моментом времени» подразумевается мгновение (миг), т. е. исключение всякой длительности.[3] Но современная физика доказала, что движение вне времени (мгновенное движение) невозможно. Мгновенное движение означает движение с бесконечной скоростью, что многим казалось противоречивым допущением еще во времена ньютоновой механики, выдвинувшей опровергнутый современным естествознанием принцип дальнодействия. Реальное движение немыслимо вне времени.

3 Ведь, как писал Аристотель, «теперь» не является частью времени.

Согласно В. И. Ленину[4], любая метафизическая концепция движения содержит в себе три ошибки: во-первых, она описывает результат движения, а не само движение, т. к. тело находится «здесь» и «теперь» в результате движения; во-вторых, она не показывает возможности движения, т. к. непонятно, каким образом, тело переходит из одной точки пространства в другую; и, в-третьих, она изображает движение как сумму состояний покоя.

4 В. И. Ленин. Сочинения, т. 38, с. 255.

Диалектическая концепция движения правильнее отражает его действительную сущность и свободна от тех противоречий, которые неизбежно возникают при метафизическом подходе к анализу движения, пространства и времени. Вместе с тем, диалектический подход с самого начала базируется на признании противоречивости движения и старается преодолеть трудности, связанные с отображением движения в мышлении, исходя из этого положения как факта. Здесь на первый план выходит основная проблема любой философии: проблема адекватности наших представлений о явлениях внешнего мира самим этим явлением.

Необходимо подчеркнуть, что диалектическая концепция движения не разрешает раз и навсегда проблем, связанных с отображением движения в понятиях. Согласно С. А. Яновской, идеализация, которая огрубление отображает движение на данном этапе развития науки, на новом этапе сменяется другой, более совершенной идеализацией, приближающей нас в какой-то степени к оригиналу. При этом разрешаются некоторые старые противоречия и возникают новые. «В разрешении этих вновь и вновь возникающих противоречии, связанных с отображением движения (а, следовательно, с самой его сущностью), и состоит развитие науки, которое само есть процесс и носит, следовательно, тот же, диалектический характер»[1]. Противоречия, связанные с проблемой движения, до конца неустранимы; с этой точки зрения апории Зенона оказываются неразрешимыми.

Кроме того, анализ проблемы показывает, что диалектическая теория движения не может быть формализована. Еще в древности было замечено, что движение никак нельзя выразить в логических образах, не остановив его. Остановленное движение уже не есть движение. Эта трудность являлась основной не только в античном, но и в любом метафизическом понимании движения. Однако можно ли считать в наше время эту трудность полностью преодоленной? Ведь в применяемых в науке формулах движения временной процесс представлен в виде дискретной последовательности точечных событий, а вот как возможен переход из точки в точку, об этом обычно ничего не говорится. В точке движение происходить не может, т. к. имеется всегда в виду непротяженная неделимая точка, а весь интервал движения получается состоящим из последовательности точечных состояний, в каждом из которых движение невозможно (нечто вроде зеноновской «Стрелы»). Подобную абстракцию А. Бергсон называл «кинематографическим представлением о действительности».

Здесь интересно привести мнение известного современного математика Р. Куранта, согласно которо-

[1] С. А. Яновская. Цит. соч., с. 134.

му непрерывное «динамическое» движение не может быть выражено иначе, как через статические модели, примером каковых и является математическое представление о движении. «Между интуитивной идеей и математической формулировкой, призванной описать в точных выражениях важные для науки элементы нашей интуиции, всегда останется разрыв, пробел. Парадоксы Зенона и указывают на этот пробел»[2].

Несмотря на установленную еще в древности (главным образом, Аристотелем) неправомерность и противоречивость представления о движении как бесконечной последовательности дискретных шагов, современные формальные теории движения основаны именно на таком представлении, и это представляет собой едва ли не самый большой парадокс из всех, о которых у нас до сих пор шла речь. Причина этого заключается в том, что метафизическая концепция движения, как наиболее простая и полностью подчиняющаяся законам формальной логики, формализуема. Несмотря па огрубленное, поверхностное представление о сущности движения, даваемое метафизической концепцией, на ее основе созданы методы, позволяющие с желаемой степенью точности вычислять параметры движения. Любое выражение движения в понятиях, по В. И. Ленину, есть омертвление живого, поэтому создание строгой теории движения, основанной на диалектическом его понимании, будет сложным и длительным процессом, требующим коренной перестройки существующих в науке методов.

2

Р. Курант. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М., 1967, с. 72.

§ 4. ОТ «ЛОГИКИ» ТОЧЕК И МОМЕНТОВ К ИЕРАРХИИ СОБЫТИЙ

Противоречие между непрерывностью и дискретностью уже не раз явилось причиной возникновения кризиса основ пауки. Действительно, открытие пифагорейцами несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной можно интерпретировать как невозможность адекватно выразить непрерывное при помощи дискретного. На трудности, неизбежно возникающие при любой попытке проанализировать непрерывное, отобразить его в дискретных образах, указали апории Зенона. В течение всего последующего развития науки на первый план в качестве основополагающей выдвигалась то идея непрерывности, то идея дискретности[1]. К началу нашего столетия была объявлена достигнутой арифметизация, т. е. «дискретизация» анализа и других математических дисциплин на основе теории множеств, что совпало с началом нового кризиса. А. Френкель и И. Бар-Хиллел пишут, что «преодоление пропасти между областью дискретного и областью непрерывного, или между арифметикой и геометрией, есть одна из главных – пожалуй, даже самая главная – проблем оснований математики»[2].

При любой попытке объяснить непрерывное при помощи дискретного, а движение – при помощи покоя, неизбежно возникают противоречия. «Это такого рода соображения, я думаю, – пишет Бертран Рассел, – которые заставили Бергсона и многих других считать движение в действительности одним неделимым целым, а не последовательностью отдельных состояний, представляемых себе математиком»[3].

Рассел не отрицает «данного в опыте» континуума, т. е. чувственно воспринимаемой непрерывности пространства, времени и движения, но считает, что подобных представлений недостаточно для создания

1 Ср. напр.: А. Д. Александров. Роль В. И. Ленина в развитии науки. «Вопросы Философии», 1960, № 8.

2 А. Френкель, И. Бар-Хиллел. Основания теории множеств, с. 240.

3 B. Russell. Our Knowledge of the External World, p. 145.
Несмотря на то, что Рассел считает концепцию Бергсона неспособной найти выход из трудностей, в ответ на которые она возникла, следует отметить, что мысли Бергсона заслуживают большого внимания.

непротиворечивой концепции непрерывности. В то же время Рассел считает возможным дать непротиворечивое определение непрерывности на основе теории бесконечных множеств Г. Кантора. С этой целью он вводит различные «уровни» непрерывности. Низшим уровнем непрерывности Рассел считает плотность (у Рассела–«compactness»), присущую даже некоторым счетным множествам, которая заключается в том, что между любыми двумя элементами находится бесконечное множество других, и, следовательно, ни для одного элемента не существует непосредственно за ним следующего[4]. Высшим уровнем непрерывности считается непрерывность по Кантору (напр., линейный континуум). Для отображения чувственно воспринимаемых непрерывности и движения Рассел считает достаточной плотность.

Как видим, в концепции непрерывности Рассела с самого начала постулируется возможность рассмотрения явлений состоящими из атомарных событий, не имеющих измерений (т. е. точек); в то же время подобное допущение, как было показано выше, порождает большие трудности; поскольку Рассел не занимается чисто математической непрерывностью, а связывает свои рассуждения с реальностью, то логическая непротиворечивость его построений не может считаться критерием их истинности. Для решения основной трудности, связанной с апориями Зенона, Рассел старается использовать теорию трансфинитных чисел Кантора. Рассел пишет, что до Кантора никто не мог себе представить бесконечный ряд завершенным и тем более мыслить что-либо за пределами этого ряда. Подобные же предрассудки мешают людям осознать возможность встречи Ахиллеса с черепахой[5]. Ряд значений, который переменная (Ахиллес) должна пройти, можно мыслить как единое завершенное трансфинит-

4 Примеры плотных множеств были приведены выше, в связи с апориями.

5 B. Russell. Op. cit., p. 186.

ное число, а за пределами этого ряда находится цель, которая представляет собой следующее трансфинитное число, легко получающееся из первого.

Положение движущегося тела Б. Рассел определяет как непрерывную функцию времени[1]. Это определение Рассел основывает на определении непрерывности функции в точке и в точечном интервале, известном из математического анализа. Оно заранее принимает, что промежуток времени состоит из непротяженных моментов. Непрерывность движения, по Расселу, гарантируется тогда, когда частица проходит все промежуточные значения аргумента[2]. Подобное абстрактное рассуждение было бы приемлемо опять-таки в том случае, если бы Рассел ограничивался сферой математики. Но все дело в том, что его задачу составляет логическое обоснование реальной непрерывности движения. Признавая точки и моменты несуществующими, Рассел тем не менее основанную на них концепцию непрерывности считает адекватно отображающей действительность.

А. Грюнбаум вообще отказывается от рассмотрения любых видов непрерывности, кроме непрерывности по Кантору. Он критикует концепцию Рассела за то, что тот учитывал эмпирический критерий при анализе непрерывности и допускал низшую непрерывность, т. е. плотность, как один из видов непрерывности. Грюнбаум, постулируя с самого же начала актуальную бесконечность точек в отрезке, строит теорию непрерывности, основываясь на теоретико-множественном понимании непрерывности. Основным достоинством канторовского понимания непрерывности Грюнбаум считает то, что ограниченный линейный континуум содержит все свои точки сгущения. Рассмотрение величины, состоящей из точек, с математической точки зрения непротиворечиво и совершенно не требует дове-

1 Ibid., p. 142–143.

2 Т. е. проходит все точки плотного множества, где, как известно, не существует двух последовательных..

дения до конца процесса деления величины на части. Точку, с точки зрения Грюнбаума, можно рассматривать как вырожденный интервал, но совершенно излишне задавать вопрос, каким образом можно получить вырожденный интервал из протяженных интервалов (он не получается, а с самого же начала берется, рассматривается таковым)[3].

Движение Грюнбаум понимает следующим образом: если происходит движение тела в каком-то конечном интервале, то внутри данного интервала можно засечь замкнутый интервал, т. е. точно указать первую и последнюю точку отрезка пути, которые тело уже прошло. То, что тело прошло первую и последнюю точку непрерывного интервала пути, означает, что между этими точками произошло континуальное множество точечных событий. Грюнбаум считает это фактом, не требующим обоснования и даже какого-либо объяснения. Не имеет смысла задавать вопрос, каким образом могло произойти актуально бесконечное множество событий в конечном интервале. Достаточно того, что эта концепция движения непротиворечива и совместна с принципами теории относительности (на основе своей концепции непрерывности и движения Грюнбаум дает попытку решения апорий Зенона). В своих последующих работах Грюнбаум развивает ту же теорию на другой основе; признавая, что «парадокс протяженности» (или «парадокс меры») бросает вызов современной науке (Грюнбаум приводит П. Дюбуа-Раймона, У. Джемса, П. Бриджмена как ученых, отвергнувших концепцию точечного континуума), он пытается обосновать возможность логически непротиворечивого построения протяженного из непротяженного, используя топологическую теорию меры (ранее Грюнбаум пытался использовать для этой цели теоретико-множественную теорию меры)[4].

3 A. Grünbaum, A Consistent Conception of the Extended Linear Continuum as an Aggregate of Unextended Elements, «Philosophy of Science», 1952, Vol, 19, No. 4, p. p. 299–302.

4 См. А. Грюнбаум. Философские проблемы пространства н времени, М., 1969.

На это Грюнбауму можно было бы ответить, что его концепция при всей ее непротиворечивости не имеет того значения, которое он пытается ей придать. Она лишь отодвигает трудности, которые должна разрешить, в глубину, где возникают еще большие трудности обоснования тех понятий, на которых базируется эта концепция. Теория относительности, соответствие которой Грюнбаум считает преимуществом своей теории по сравнению с расселовской и другими, рассматривает точечные события, как события, измерениями (протяженностью, длительностью) которых можно пренебречь; вместе с тем всегда необходимо иметь в виду, что это приближение, огрубление, а на самом деле любое событие имеет измерения. Математика для физики – средство выражения мыслей (возможно, единственное), но никак не основа и не критерий существования физических понятий. Математика не может разрешить проблемы физического движения; в забвении этого и кроется, по нашему мнению, основное заблуждение концепций, подобных концепции Грюнбаума. Чисто математический подход к физическим и философским проблемам естественно привел к тому известному заявлению Рассела, с которым соглашается в своей статье Грюнбаум, что в основе движения действительно лежит покой, природа на самом деле неподвижна, а летящая стрела действительно покоится.

Анализ математического аспекта апорий Зенона породил проблему, которая получила в литературе название проблемы завершенности бесконечного ряда. Что значит, что ряд последовательных значений переменной завершен? Возможны два различных ответа на данный вопрос:

а) существует последнее в рассматриваемом ряду значение переменной;

б) существует конечный предел последовательности значений переменной. Считается, что непрерывность движения требует принадлежности предельной точки ряду значений переменной.

Некоторые исследователи предлагают решить апории на основе «смягчения» понятия завершенности бесконечного ряда. Не имеет смысла пересчитывать бесконечное множество, но если существует конечный предел, то тело может считаться актуально достигнувшим цели, если оно попадает в сколь-угодно малую ее окрестности[1]. С точки зрения других авторов, попадание тела в достаточно близкую от цели область позволяет считать цель достигнутой, так что существование предела необязательно (этот вывод, по нашему мнению, сомнителен)[2]. По мнению Ю. А. Петрова, в книге которого проведен хороший анализ различных современных концепций непрерывности и движения, мнение вышеупомянутых авторов заслуживает внимания при анализе реального движения, т. к. микрообъекты не обладают строгой пространственно-временной локализацией, и, поскольку движение и непрерывность рассматриваются на макроуровне, раз-мерами микрочастиц и расстояниями между ними можно в. случае надобности пренебречь[3].

Заслуживает внимания и то, что А. Грюнбаум, которому обычно свойственна математическая строгость в рассуждениях, также развивает гипотезу смягчения понятия завершенности бесконечного ряда в одной из своих последних статей на рассматриваемую тему. Согласно Грюнбауму, необязательно, чтобы существовал последний член ряда и, тем более, возможность указать или вычислить его, для того, чтобы тело прошло весь отрезок пути и достигло конечной точки. Эта операция осуществляется не только теоретически, но и реально. Она просто кажется человеку неосуще-

1 Cf. J. Watling, The Sum of an Infinite Series, «Analysis», 1952, Vol. 13, No. 2.

2 S. M. Hinton and C. B. Martin, Achilles and the Tortoise, «Analysis». 1953, Vol. 14, No. 3.

3 Ю. А. Петров. Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости, с. 133-134.

ствимой, т. к. эмпирическое восприятие времени человеком обнаруживает наименьшую нижнюю границу, за которой человек теряет способность умственного рассмотрения различных процессов (например, процесса счета)[1]. Из концепции Грюнбаума явствует, что и к проблеме смягчения завершенности ряда он подходит также, как и к рассмотренным выше проблемам движения и непрерывности, т. е. считает, что действительность устроена в полном соответствии с научными абстракциями.

В связи с концепцией Грюнбаума интересно вспомнить слова С. А. Богомолова: «Переменная не может достигнуть своего предела. Но если мы обратимся к реальному миру, то увидим, что прав Ньютон[2]: на наших глазах переменные сплошь и рядом достигают своих пределов в конечный промежуток времени»[3]. Здесь мы имеем яркий пример онтологизации математических моделей движения. Стоит вспомнить, что понимается в математике под «движением» переменной к своему пределу и что означает «достижение» предела, как становится ясным, что переносить эти понятия на действительность можно лишь в том случае, если совершенно не соблюдать грани между абстракцией и реальностью.

В последнее время, в связи с развитием атомной физики, особый интерес приобрела проблема структуры микрочастиц, а также движения на субатомном уровне. Пытаясь преодолеть противоречия, возникающие при рассмотрении структуры пространства, времени и движения в качестве непрерывной, большинство физиков становятся на точку зрения их дискретности (достаточно указать на популярные сегодня идеи квантования времени и пространства и о регенерационном движении элементарных частиц). Против правомерности использования континуальных моделей времени

1 A. Grünbaum, Can Infinitude of Operations Be Performed in a Finite Time? «The British Journal for the Philosophy of Science», 1969, Vol. 20, № 3, p. p. 203–208.

2 Как известно, И. Ньютон считал, что переменные актуально достигают своих пределов. Например, бесконечно малые величины он считал абсолютными нулями.

3 С. А. Богомолов. Цит. соч., с. 77.

4 Дж. Уитроу. Естественная философия времени, М., 1964, с. 196.

выступает, например, Дж. Уитроу, который называет идею бесконечной делимости времени «логической фикцией»[4]. Следует, однако отметить, что принятие гипотезы дискретной структуры пространства, времени и движения влечет за собой трудности, аналогичные тем, которые были уже рассмотрены при анализе апории «Стрела». Это послужило причиной того, что в журнале «Вопросы философии» в шестидесятых годах развернулась целая дискуссия, посвященная этой апории.

Большинство физиков склонны допускать существование квантов времени и пространства, т. е. ставить делимости последних предел. Например, И. Е. Тамм считает пространство в микроскопических масштабах дискретным. Между тем следует различать дискретность, не исключающую непрерывности, и абсолютную дискретность, которая не оставляет никакой возможности непротиворечиво мыслить время и пространство в микромире. Во всяком случае, на сегодняшний день физика выяснила с уверенностью следующее: существует минимальная длина и минимальный промежуток времени, ниже уровня которых классические представления о пространстве и времени теряют смысл. Более того, существуют различные значения элементарных длин, которые отделяют друг от друга области с качественно отличными пространственно-временными характеристиками (это говорит о том, что мы не имеем права в своих рассуждениях о реальности допускать безграничную делимость, т. к. ниже определенного уровня господствуют законы, качественно отличные от законов макромира). Но проблема непрерывности-дискретности все еще ждет своего разрешения, т. к. физики не могут договориться о том, что понимать под дискретностью микрочастиц и их движения, а имеющийся экспериментальный материал не дает возможности высказаться определенно по этому поводу.

Интересно отметить, что теория материалистической диалектики позволяла предугадать тот вывод атомной физики, который сделан относительно правомерности бесконечной делимости пространства и времени (и который поставил под сомнение классический постулат интенсивной бесконечности материи, интуитивно принимавшийся всегда). Закон перехода количественных изменений в качественные гласит, что любые количественные изменения, применение количественных операций к объекту (каковыми являются в данном случае деление, дробление, расщепление и т. д.) должны, в конце концов, привести к коренным качественным изменениям в самом объекте, следовательно, протяженную величину нельзя дробить безгранично (даже теоретически), не учитывая того, что на определенном этапе деления его результат будет несравним с тем, что мы имели до начала процесса. Возможность научного предсказания выводов и открытий, которые затем находят экспериментальное подтверждение – одно из выражений того, что марксистская философия является методологической основой специальных наук.

Выводы и предложения современной атомной физики привели и к совершенно неожиданным последствиям; в книге И. З. Цехмистро «Диалектика множественного и единого (квантовые свойства мира как неделимого целого)» высказывается гипотеза о том, что многообразие и непрерывность являются «видимостью», поверхностью реальности, а глубже и в действительности мир существует как единое и неделимое целое[1]. В основе видимого многообразия и движения лежат более глубокие (и более реальные?) процессы, причем по отношению к этим глубинным процессам теряют смысл понятия величины, протяженности, длительности (поэтому

1 И. З. Цехмистро. Диалектика множественного и единого, М., 1972, с. 275.

Ранее аналогичный взгляд высказал Д. Бом в своей книге «Квантовая теория».

эти процессы нельзя рассматривать как какой-либо из известных науке видов движения); следовательно, эти понятия неприменимы и к миру как единому кванту. Не множественность (или непрерывность) и движение лежат в основе вещей, а, наоборот, в их основе лежит нечто более глубокое, которое лишено этих качеств[2]. По мнению И. 3. Цехмистро, «представление о мире как о многообразии является всего лишь идеализацией...»[3]. При таком понимании мира теряет смысл представление о физическом и механическом движении, а также вопрос о величине и границах мира, о его конечности и бесконечности. Несмотря на высказанные в книге интересные мысли, следует заметить автору, что любое отрицание или принижение атрибутов эмпирической реальности неизбежно сводит наше восприятие природы на уровень простого обмана чувств и Зенон выходит победителем.

Физика и, вообще, любая естественнонаучная теория, стремящая к строгости и точности, выражается на языке математики. В то же время необходимо учитывать, что у математики нет другого выхода, как выразить движение через дискретную совокупность точечных состояний, а непрерывность, протяженность – через упорядоченное множество непротяженных точек. Даже ученый, пытающийся основать свою теорию непрерывности на чистой интуиции, на представлениях чувственного опыта и ставящий себе целью обойтись без применения математических понятий и принципов (Садео Шираиши), строит непрерывность опять-таки из точек, и этим обрекает свою теорию на борьбу с теми же самыми трудностями[4].

По нашему мнению, правильнее было бы основать теорию непрерывности и движения на понятии события, а не точки, но не точечного события, измерения которого принимаются равными нулю и образом ко-

2 На что и указывают главным образом апории Зенона.

3 Там же, с. 265.

4 Shiraishi S., The Structure of the Continuity of Psychological Experiences and the Physical World, «The Science of Thought», Tokyo, 1954, No. 1. (Cf. Prior A. N. in «Journal of Symbolic Logic», 1955, Vol. 20, No 2).

торого является математическая точка, а обладающего протяженностью и длительностью события – эмпирической реальности. Подобное исходное понятие лучше отвечало бы ленинской идее о том, что и действительности движение является единством непрерывности и прерывности времени и пространства.

Непрерывным любое событие является потому, что оно обладает целостностью. Основой целостности и непрерывности всех реальных событий является взаимодействие (**causa finalis** всех вещей). Пространственно-временное событие, рассмотренное как единое целое, обладает вполне определенной структурой, единым принципам внутренней организации элементов. Поэтому в определенном смысле событие неделимо, так как любое расчленение его разрушает его структуру и теряется целостность, качественная определенность события. Сохранение определенного качества в определенных границах есть непрерывность, поэтому неделимость, цельность протяженного события означает и его непрерывность.

Поскольку событие обладает длительностью, то оно обладает различными стадиями в изменении. Непрерывность события проявляется и в том, что при смене различных стадий оно сохраняет свою качественную определенность (во временном интервале длительности данного события). Изменение различных параметров события тоже в определенных границах не затрагивает его качественной определенности. Наличие различных стадий в развитии означает в то же время, что каждая из них представляет собой качественную определенность и возможно ее рассмотрение как обладающего единой структурой непрерывного неделимого целого, т. е. события, являющегося частью или элементом первоначального. Первоначальное событие, рассматриваемое как сумма, совокупность, или последовательность (под-) событий, уже не является непрерывным, единым и неделимым. Здесь необходимо ввести различные уровни событий, их иерархию. Расчленение события на основе определенного методологического принципа завершается событием-атомом (относительно этого принципа), а любое событие в свою очередь можно рассматривать как атомарное по отношению к событиям определенного числа последующих уровней; в то же время оно не может рассматриваться как таковое по отношению к событиям какого-либо другого уровня.

Поскольку потенциальный теоретический процесс деления события на подсобытия нельзя вести безгранично (это должно быть с самого же начала запрещено), то непротяженную математическую точку можно определить как предел абстрактного потенциально бесконечного процесса деления события, актуально никогда не достижимый, и, следовательно, реально не существующий (несобственный, идеальный элемент теории). Итак, ни одно событие не состоит из точек; событие всегда состоит из событий (независимо от того, имеют ли такие понятия, как протяженность и длительность, границы применимости, трудность, связанная с непротяженными объектами-точками, устраняется).

События, находящиеся в одном ряду, на одном уровне, образуют совокупность событий. Это множество дискретных элементов, поскольку каждый элемент-событие обладает неповторимой качественной определенностью, индивидуальностью, отличающей его ото всех остальных. События не образуют плотного множества; для каждого события имеется непосредственно за ним следующее, и их можно упорядочить в пространстве и времени. Однако множество это не просто сумма, совокупность событий; различные множества, совокупности событий образуют новое событие, единое непрерывное органическое целое со структурой нового уровня, включающую их в себя в качестве подсобытий и (или) элементов. Можно показать, что такое представление не противоречит существующим теориям, так как множество событий можно задать предикативно, задав какое-либо их общее свойство и абстрагируясь от других свойств. В каждом подобном случае будем получать множество элементов какой-либо из существующих теорий непрерывности как частный случай; с ним можно производить все операции, допустимые в рамках этой теории.

Результатом развития этого подхода должна явиться (желательно аксиоматическая) теория континуума и движения на основе принципов системно-структурного анализа. Некоторые необходимые для этого принципы и понятия исследуются в третьей главе работы (Единственной известной автору работой, в которой дается попытка аксиоматизировать интуитивные представления о соотношении протяженных событий, является работа Хэмблина[1], основывающаяся на более ранних идеях А. Н. Прайора). Самой большой сложностью построения любой подобной теории является неадекватность выражения событий какого-либо уровня через события других уровней, что связано с неразложимостью многих типов реальных систем и структур, нелинейным характером связей между их элементами и подсистемами.

1 C. L. Hamblin, Starting and Stopping, "The Monists", 1969, Vo 53, #3, p.p. 410-425. (Ibid. I. J. Smart, Casual Theories of Time, p.p. 385-395; R. G. Gale, "Here and Now", p.p. 396-409; Storrs McCall, Time and Physical Modalities; N. Lawrance, Time Represented as Space, p.p. 447-456).

ГЛАВА ВТОРАЯ
О ВЗАИМООТНОШЕНИИ ФИЛОСОФСКОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОНИМАНИЯ БЕСКОНЕЧНОСТИ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ФИЛОСОФСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Понятие бесконечности тесно связано с категориями количества и качества. Оба основных исторически сложившихся взгляда на бесконечное – концепции актуальной и потенциальной бесконечности, трактуют ее как количественное понятие. Это можно объяснить тем, что именно с этой точки зрения интересовала бесконечность математику – науку, всегда в наибольшей степени нуждавшуюся в этом понятии. Философию такой подход, разумеется, удовлетворить не может. Бесконечность философию интересует, прежде всего, как неотъемлемая черта, атрибут объективной действительности, а поскольку в реальном мире нигде не встречается количество или качество в изолированном друг от друга виде, то бесконечное следует исследовать с учетом диалектического единства количества и качества. Традиционно принимается, что философские категории количества и качества служат, главным образом, для выделения в предметах и явлениях соответственно «внешней» и «внутренней» определенности. Отсюда следует, что не существует отдельно количественной или качественной границ предмета, которые являются абстракциями; реально они существуют лишь в единстве, т. е. в виде меры. Нарушение меры означает превращение данного предмета или явления в другой предмет или явление. Изменение количественных характеристик объекта в совокупности с влекомыми ими качественными изменениями представляет собой, по выражению Гегеля, движение по узловой линии меры.

На необходимость учета при исследовании реальной бесконечности закона перехода количественных изменений в качественные н на необходимость применения здесь категории меры указали В. И. Свидерский и А. С. Кармин. Они пишут: «В этом движении по узловой линии меры, конечно, всякое количественное и всякое качественное изменение, тогда как бесконечным оказывается единство количественных и качественных изменений»[1]. Следовательно, по мнению авторов, «истинной», реальной бесконечностью надо считать движение по узловой линии отношений меры.

В. И. Свидерский и А. С. Кармин резко выступают против всяких попыток истолкования бесконечности как количественного понятия и называют такую бесконечность, вслед за Гегелем, «дурной». Свой взгляд они обосновывают тем, что любое количественное изменение должно, в конце концов, прерваться изменением качества[2]. На этом основании указанные авторы высказывают мысль о конечности любых процессов в мире, конечности количества объектов и явлений в мире и метрической конечности Вселенной в пространстве и времени.

Но здесь нужна известная осторожность, так как «абсолютизация закона меры заключает в себе скрытые логические противоречия. Ведь если его ставить над всеобщими атрибутами и диалектическими законами материи, то с тем же основанием его можно применить и к самому себе, то есть считать, что в процессе количественных изменений в бесконечной материи на определенном этапе произойдут такие качественные изменения, что в дальнейшем уже не будет никаких

1 В. И. Свидерский, А. С. Кармин. Конечное и бесконечное, с. 175.

2 Там же, с. 175, 176 и др.

качественных изменений, данный закон перестанет действовать»[3].

Итак, следует учесть, что закон меры неприменим к наиболее общим понятиям и принципам, включая категорию бесконечности. Но тогда сами узловые точки отношений меры, если следовать концепции В. И. Свидерского и А. С. Кармина, можно рассматривать как бесконечную количественную последовательность. Заранее учтя подобное возражение, авторы пишут, что характер процессов в реальной действительности таков, что далеко не всегда существует возможность отграничить одно явление от другого, применить к ним процедуру счета или тем более упорядочить их в какую-либо систему, и ссылаются на то, что подобные трудности явились причиной создания Б. Расселом и А. Уайтхедом специальной логической теории типов[4]. Оставляя в стороне вопрос о правомерности ссылки на теорию типов, отметим, что, возможно, не все в мире можно средствами современной науки упорядочить в систему, но выделение количественных отношений необходимым образом связано с познаваемостью объекта (если только мир не представляет собой хаос; но в таком случае научное познание его было бы невозможно).

По нашему мнению, выделяемость количественной стороны или момента в объекте является необходимым условием познаваемости объекта. Конечно, это условие можно отнести к негативным критериям, так как само по себе оно не гарантирует достижения поставленной цели. Нам могут возразить, что познание объекта есть прежде всего познание его качества, внутренней определенности. Но возможно ли получить научное знание об объекте без изучения его количественных характеристик? Подобное «знание» имело бы мистический оттенок. Несомненно, во всяком случае,

3 С. Т. Мелюхин. Проблема бесконечности мира в философии и естествознании, «ВФ», 1965, № 6, с. 54.

4 В. И. Свидерский, А. С. Кармин. Конечное и бесконечное, с. 175–176.

что продолжающийся процесс математизации многих областей науки, свидетельствующий об универсальности количественных методов, лишний раз подтверждает правильность сделанного вывода.

Источником математического (точно так же как и любого другого) знания является реальная действительность, однако связь математических объектов с реальным миром сложная и опосредствованная. Математика изучает количественные отношения не непосредственно между реальными объектами, а количественные отношения между абстрактными объектами, не имеющими непосредственного аналога и реальной действительности. Законы, подчиняющие себе идеализированные количественные абстракции, могут быть приложимы к реальному миру, но, по словам Ф. Энгельса, «идеальная потребность математика далека от того, чтобы быть принудительным законом для реального мира»[1]. Непротиворечивость, которая считается основным критерием в математических построениях, с философской точки зрения означает абстрактную возможность, поэтому в смысле соотносимости с реальностью математика в целом есть сфера возможного, а не действительного. Практические потребности человека уже не являются основным стимулом развития математики; среди современных математических и логических теорий есть, вероятно, и такие, которые никогда не будут иметь практического применения.

Несмотря на то, что исходные математические понятия и принципы взяты, в конечном счете, из реальной действительности, ни одна математическая теория не строится с учетом каких-либо иных законов, кроме имманентных математических и логических законов, в то время как, скажем, в физике или астрономии приходится учитывать законы и принципы самых различных наук (мир математики относительно обособлен, зам-

1 К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. 20, с. 51.

кнут в себе). Ф. Энгельс в «Анти-Дюринге» справедливо выступает против понимания математики как «свободного творения духа», отмечая в то же время, что образование математических абстракций требует полного отделения в реальных объектах формы от содержания и выделения количества в чистом виде. Углубляясь в абстракцию, мы постепенно отходим от реальности, «и только в самом конце мы доходим до продуктов свободного творчества и воображения самого разума, а именно – до мнимых величин»[2]. Математика является единственной областью научного знания, где возможно конструировать объекты, исходя лишь из внутренних, имманентных потребностей непротиворечивости, полноты и целостности самой теории (необходимость введения подобных объектов появляется уже на довольно высокой ступени абстрагирования).

То обстоятельство, что предметом изучения математики являются пространственные формы, не может изменить количественного статуса предмета математики в целом. Нам могут возразить, что пространственная форма реального объекта во многом определяет его качественную определенность. Но ведь математика как раз и абстрагируется от индивидуальных особенностей реальных пространственных форм, оставляя в них лишь то, что позволяет их объединять в классы по количественным признакам. Во-первых, в математических рассуждениях участвуют не реальные, а идеальные пространственные формы, а, во-вторых, к изучению их математика подходит все с теми же количественными мерками и критериями и рассматривает количественные отношения между ними. Прежде всего, в связи с этим представляет интерес анализ взаимоотношения категорий количества и качества применительно к математическим абстракциям. Какие бы сложные и специфические абстракции ни создавала

2 Там же, с. 37.

математика, с философской точки зрения все они являются количественными, если только количество не понимать слишком упрощенно. (Даже современные топологические понятия, выражающие целостность, непрерывность, структурность, и поэтому на первый взгляд чисто качественные, при анализе теряют свою «качественную оболочку»)[1].

Категория количества (точно так же как и категория качества) является основной философской категорией, она характеризуется универсальностью и поэтому применима буквально везде. Из всех специальных наук наиболее широко применяет категорию количества математика; математику можно даже определить как науку о наиболее общих закономерностях, которым подчиняются количественные абстракции. Эта специфика предмета и содержания математики существенно отличает ее от всех остальных специальных наук. Если понятия и категории других специальных наук имеют сферой применения определенную область действительности, за пределами которой они могут оказаться неприменимыми, то основные категории математики применимы ко всей действительности в ее количественном разрезе, сечении. Математика является методологическим инструментом, применимым к изучению количественных аспектов любой сферы действительности. Все это позволяет говорить об особом статусе математики как специальной науки.

Количественная характеристика какого-либо объекта, рассмотренная сама по себе, обладает и количеством и качеством. В то же время она от этого не перестает быть количественной по отношению к объекту. Кроме того, различные количественные характеристики одного и того же или разных объектов качественно различаются друг от друга (поскольку каждая из них

1 Мы предвидим возражения по поводу наших рассуждений о количественном характере современной математики; поэтому необходимо обратить внимание читателя на то обстоятельство, что любые «качественно» сложные математические объекты сводимы к «качественно» простым при помощи количественных методов, что указывает на относительный смысл понятия качества в рамках этой науки. В то же время качественность в реальном мире связана с возникновением новых качеств одновременно со «снятием» старых - неповторимостью каждого качества и каждого этапа развития.

обладает своим качеством), но, это, конечно, не меняет их количественного характера.

Различие между абстракциями следует строго отличать от различия между абстракцией и ее прообразом. Разумеется, в пределах математики существуют качественные различия. Качественно различаются друг от друга, прежде всего, сами математические объекты и процессы. При осуществлении математических процессов мы производим качественные изменения объектов. Но эти «качественные» изменения (точно также как и качественные различия между математическими объектами) не выводят нас за пределы количественного аспекта бытия, так же как и вся математика в целом. Все это – «качество в пределах количества»[2]. Нам представляется неприемлемым вывод о том, что «до сих пор широко распространен предрассудок, будто математическая бесконечность – это количественная или даже «дурная» бесконечность. Такие представления устарели лет на сто (на пятьдесят заведомо)»[3]. И примеры «качественных» типов бесконечности, которые приводит Г. И. Наан (топологическая, теоретико-множественная и др.), свидетельствуют лишь о том, что за последнее столетие понимание количества поднялось на более высокую, качественно новую ступень.

Отрицательное отношение к количественной трактовке бесконечности не является ни новым, ни оригинальным. Наиболее резко против количественной бесконечности выступал, как известно, Гегель. Бесконечному количественному прогрессу, имеющему своим образом неограниченно продолженную в обе стороны прямую («дурная» бесконечность) Гегель противопоставил т. н. «истинную» бесконечность, бесконечность как завершенность, полную самоопределенность, образом которой является круг, достигшая себя линия, не имеющая ни начального, ни конечного пункта[4].

2 См.: Г. И. Рузавин. Проблема бесконечности в математике. «Бесконечность и Вселенная».

3 Г. И. Наан. Понятие бесконечности в математике и космологии. «Бесконечность и Вселенная», с. 32.

4 Гегель. Наука логики, т. I, М., 1970, с. 215 и др.

Анализ концепции Гегеля показывает, что гегелевская «истинная» бесконечность действительно представляет собой качественную трактовку бесконечности; но недостаток ее в том, что она абсолютизирует момент положительной качественной самоопределенность, самообусловленности в бесконечном, совершенно игнорируя другие существенные черты последнего (это значит, что в целом можно согласиться с оценкой «истинной» бесконечности Гегеля, содержащейся в книге В. И. Свидерского и А. С. Кармина). И уж совсем неубедительными выглядят математические примеры, приводимые Гегелем; например, что дробь 2/7 является «качественным» представлением бесконечной «дурной» последовательности десятичных знаков[1]. Оба вида записи числа являются чисто количественными, только одна конечна, а другая нет.

1 Гегель. Наука логики, т. I, М., 1970, с. 327 и др.

В связи с этим следует заметить, что в математике существует два способа определения, задания множества элементов: по объему (табличный способ) и по содержанию (предикативный способ). В первом случае перечисляются и охарактеризовываются все элементы совокупности, во втором же задается предикат, свойство, условие, которому должны удовлетворять все члены данной совокупности и только они. В случае бесконечных (или слишком больших) множеств преимущество, по вполне понятным причинам, отдается второму способу определения. Задать одно–единственное свойство равносильно тому, чтобы задать все бесконечное множество объектов, обладающих этим свойством. Однако, утверждение конечности или бесконечности множества относится не к определяющему предикату, т. е. не к содержательной, качественной стороне, а к объему множества, т. е. к совокупности принадлежащих ему элементов. Бесконечность бесконечных рядов и последовательностей основана на задании принципа порождения, алгорифма, формулы общего члена, поэтому трактовка предикативного способа определения как качественного может привести к иллюзии качественного определения математической бесконечности, что и происходит с некоторыми исследователями.

Итак, математическая бесконечность может носить только количественный характер, что ни в коем случае не характеризует ее с «дурной» стороны. Что же касается критики некоторыми авторами количественной бесконечности и трактовки ее ими в качестве «дурной», то уместно вспомнить следующие слова Ф. Энгельса: «Когда мы говорим, что материя и движение не сотворены и неуничтожимы, то мы говорим, что мир существует как бесконечный прогресс, т. е. в форме дурной бесконечности»[2].

В то же время в связи с проблемой бесконечности в философии представляет интерес следующая мысль Б. Больцано: «Я не допускаю только того, чтобы философу известен был какой-либо предмет, которому он был бы в праве приписать свою бесконечность, как качество, не обнаружив раньше в этом предмете, в каком-либо отношении, бесконечной величины или бесконечного количества»[3]. Это в особенности касается философов, пытающихся найти чисто качественную трактовку бесконечности.

Понятия бесконечного количества и бесконечности как количества по существу тождественны, чего нельзя сказать о понятиях: «бесконечное качество» и «бесконечность как качество». Понятие «бесконечного качества» можно понимать лишь как ничем не ограниченное качество или как качество бесконечного класса объектов или их свойств, т. е. бесконечное качество сводится опять-таки к бесконечному количеству. Вообще правомерность употребления понятия «бесконеч-

2 К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. 20, с. 554.

3 Б. Больцано. Парадоксы бесконечного. Одесса, 1911, с. 13.

ное качество» вызывает сомнения, так как качество неразрывно связано с мерой, означающей определенность, «внутреннюю ограниченность» любого явления или процесса, поэтому проблема бесконечного качества упирается в проблему возможности существования бесконечной меры (не является ли последнее понятие самопротиворечивым?). Множества реальных объектов, явлений, их свойств и связей между ними составляют в целом неисчерпаемое многообразие мира, не поддающееся никакой количественной оценке. Как отмечает А. С. Кармин, именно такой смысл вкладывается обычно в понятие «качественная бесконечность»[1].

Как уже указывалось выше, правомерность применения к понятиям, эквивалентным «миру в целом», закона меры вызывает сомнения. С этим связаны и трудности анализа понятия реальной бесконечности в смысле соотношения в нем количества и качества. Реальную бесконечность, с одной стороны, можно понимать как характеристику количественного аспекта объективной действительности, но, с другой стороны, бесконечность есть свойство мира, создающее вместе с другими существенными характеристиками последнего его качество, неповторимость, уникальность.

Реальная бесконечность представляет собой диалектические единство количества и качества. В связи с этим интересен тот факт, что математические абстракции бесконечности, ни лученные в результате абстрагирования от качественной ее стороны, плодотворно применяются при изучении закономерностей материальной действительности, чего нельзя сказать о концепциях, полученных в результате абстрагирования от ее количественной стороны, как показывает судьба гегелевской «истинной» бесконечности.

Абстрагируясь от законов природы, математика не может полностью абстрагироваться от универсальных

1 А. С. Кармин. Методологическое значение категорий конечного и бесконечного. «Методологические аспекты материалистической диалектики» (сб.), Л., 1974, с. 88.

философских законов, однако, в некотором смысле абстрагирование из них становится для нее необходимостью. То, что сумма бесконечного сходящегося ряда может не удовлетворять условию, которому удовлетворяют все члены этого ряда или то, что бесконечная последовательность непрерывных функции может дать в пределе разрывную функцию, трактуется иногда как пример проявления закона меры в математике. На самом деле математика абстрагируется в какой-то степени и от закона меры, что и делает возможным рассмотрение бесконечных количественных процессов: любой предельный переход, рассмотрение бесконечных сумм и произведений является следствием подобного абстрагирования. А в вышеприведенном примере действие закона меры можно было бы усмотреть лишь в том случае, если уже на достаточно большим конечном этапе суммирования ряда или изменения переменной в них происходили бы коренные качественные изменения, чего на самом деле нет (подобные рассуждения встречаются только в ультраинтуиционистских концепциях, см, § 4). Бесконечность же сама качественно отличается от любого конечного, поэтому изменение свойств математических объектов при переходе от конечного их количества к бесконечному нельзя понимать как проявление закона меры[2].

Большой интерес представляет сравнительный анализ философской и математической абстракций, в частности, выявление специфического различия между ними. Прежде всего, необходимо отметить, что философию, так же как и естественные науки, волнует вопрос об адекватности своих моделей по отношению к объективной реальности. Более того, это является критерием истинности подобных моделей. В математике, в соответствии со спецификой данной науки, положение несколько, иное. Здесь невозможна постановка

2 Следовательно, процесс, ограничиваемый (или ограниченный) в различных отношениях, бесконечен в том отношении, в каком его можно рассматривать как безмерный.

вопроса о соответствии абстрактных математических объектов объективной действительности: этот вопрос не входит в компетенцию математики (в то же время именно с этой точки зрения интересует математика философию и естественные науки). Рассматривая разделы современной теоретической (т. н. «чистой») математики, трудно уловить какую-либо связь с реальной действительностью. Даже аксиомы, на основе которых строятся современные математические теории, уже не отличает та очевидность и интуитивная ясность, которые всегда считались основными признаками аксиом. Разумеется, логические законы, принципы, на которых строится любая математическая теория, не носят априорного характера, не являются ни конвенцией и ни субъективным представлением, а являются обобщением объективного человеческого опыта. В. И. Ленин писал, что «практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, дабы эти фигуры могли получить значение аксиом»[1].

Но если математику удалось построить из аксиом непротиворечивую систему, то он может построить на ее основе теорию, достигнув при этом необычайно высокой степени абстракции и не задумываясь ни минуты над тем, соответствует ли результатам этой теории что-либо в реальной действительности (в целом математика является сферой концептуальной реализации абстрактных возможностей). Несмотря на это, впоследствии нередко такие теории необычайно точно «накладываются» на действительность! Самый известный пример в этом смысле – неевклидовы геометрии. Это дает основания предположить, что существует тесная (но малоизученная) объективная связь между принципами строения математических теорий и объективного мира. Человеческий разум при абстрактных построе-

1 В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 29, с. 181–182.

ниях не может значительно отклоняться от потенциально осуществимого в реальности.

Несмотря на подобное неосознанное соответствие, невозможно требовать от математических теорий, чтобы они строились в соответствии с законами объективной реальности, хотя критерий непротиворечивости, который считали критерием истинности в математике Д. Гильберт, А. Пуанкаре и др., по-видимому, нельзя считать достаточным. Поскольку математика является «языком» естествознания, критерий истинности естественнонаучных теорий должен включать как обязательный компонент критерий непротиворечивости; они должны: 1) с определенной, возможно большей степенью приближения описывать реальные промессы и явления; 2) характеризоваться логической непротиворечивостью формального построения.

Возникает вопрос: можно ли уходить во время абстрактных математических рассуждений сколь-угодно далеко, или же существует предел, после которого математические абстракции уже не могут сохранять непротиворечивость ни с принципами самой математики, ни с принципами самой математики, ни с законами объективной действительности? Весьма показательным в этом смысле является положение в теории множеств.

Открытие антиномий теории множеств, например, антиномии множества всех множеств и антиномии множества всех порядковых чисел, привели математиков к мысли о том, что неограниченное применение каких-либо принципов абстрагирования и неограниченное расширение сферы применения каких-либо понятий молил привести к возникновению самопротиворечивых объектов, употребление которых в математике запрещено (интуиционисты причисляют к ним любые объекты, характеризующиеся актуальной бесконечностью). Это наводит на мысль о том, что верхняя граница абстрагирования в математике, по-видимому, существует. В то же время установление этой границы не представляется возможным вне философского анализа математических теорий.

В иерархии математических понятий следует различать различные уровни абстракции. Например, между абстракцией осуществимости триллиона математических операций, абстракцией осуществимости сколь-угодно большого натурального числа, и бесконечной последовательностью бесконечных мощностей (шкалой алефов), имеется качественное различие. Каждая последующая принадлежит к качественно более высокому уровню абстракции.

Гильберт понимал бесконечность как регулятивную идею (в кантовском смысле), которой в реальном мире ничего не соответствует[1]. Бесконечность, по Гильберту, лишь вспомогательное средство, «идеальный элемент». Но, в соответствии со специфичностью математического типа абстракции, даже в этом случае бесконечность прочно занимает свое место среди других математических понятий и категорий, тогда как в философии подобное понимание бесконечности всегда приводило к ее фактическому отрицанию ввиду отсутствия в этом понятии реального содержания. Философская бесконечность превращается тогда в пустое, бессодержательное понятие, фикцию. Вместе с тем, следует отметить, что конечное в философии представляет собой такое же абстрактное понятие, как и бесконечное; но «конечное», в отличие от «бесконечного», имеет прямой наглядный аналог в реальной действительности в виде конкретных, определенных, ограниченных предметов, явлений и процессов.

Философская абстракция – абстракция более высокого порядка, чем специально-научная. Она часто по-

1 Д. Гильберт. Цит. соч., с. 364.

лучается в результате переработки, обобщения, еще большего абстрагирования от понятий и категорий специальных наук. А философские категории представляют собой наиболее общие возможные в любой системе научного знания понятия. Однако, абстракции, по нашему мнению, можно рассматривать по степени общности (наибольшей степенью являются универсальные понятия, категории), и по степени свободы (в этом смысле математическая абстракция может подняться выше философской). Философские категории отражают объективную реальность, которая накладывает ограничения, обусловливает их содержание, в то время как современная математика имеет дело исключительно с идеальными абстрактными конструктами. Поэтому не совсем прав Г. И. Наан, утверждая, что философия гораздо меньше связана с реальной бесконечностью, чем специальные науки, поскольку «философия оперирует не с реальной беспонечностью и даже не с абстракцией бесконечности, а с абстракцией абстракции бесконечности»[2].

2 Г. И. Наан. Понятие бесконечности в математике и космологии, с. 75.

§ 2. О ГИПОТЕЗАХ ОСУЩЕСТВИМОСТИ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ АБСТРАКЦИИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Основными классическими абстракциями бесконечности являются, как известно, потенциальная и актуальная бесконечность. Кроме того, в некоторых «неклассических» направлениях математики и логики фигурирует еще одна абстракция – практическая бесконечность. Каждая из перечисленных абстракций базируется на соответствующей абстракции (или гипотезе) осуществимости, к анализу которых мы приступаем в настоящем параграфе. В процессе развития математики сменяли друг друга различные концепции бесконечности и соответственно на первый план выходила то одна, то другая гипотеза осуществимости, которая рассматривалась как основополагающая для математических теорий. Ю. А. Петров справедливо отмечает, что «логика и математика не могут обойтись без какой-либо формы осуществимости и бесконечности, ибо в противном случае теряется всеобщность их законов»[1].

Как уже говорилось во введении к настоящей работе, первым исторически сложившимся типом бесконечности был тип, который может быть охарактеризован как практическая «бесконечность». Правда, это еще не была научная концепция бесконечности (бесконечным считалось все то, что превышало возможности человека, не укладывалось в рамки его представлений или не могло быть реализовано имеющимися в то время материальными средствами), но и такое преднаучное понимание бесконечности базировалось на определенной предпосылке. Этой неосознанной предпосылкой была практическая осуществимость. Следующим этапом в развитии научного понимания бесконечности (и в то же время качественно новым этапом развития абстрактного мышления) явилась концепция потенциальной бесконечности. Лежащая в основе абстракции потенциальной бесконечности предпосылка потенциальной осуществимости, которая принимает выполнимость любого конечного числа операций, представляет собой более сильное допущение, чем практическая осуществимость, которая постепенно, в связи с развитием мышления и расширением сферы человеческого познания, сопровождавшемся накоплением опыта об окружающем мире, стала совершенно недостаточной.

В литературе можно встретить различные мнения относительно того, появилась ли концепция актуальной бесконечности одновременно с потенциальной

1 Ю. А. Петров. Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости, с. 31.

или же сформирование какой-либо из них предшествовало формированию другой. Имеющиеся исторические данные не позволяют однозначно разрешить этот вопрос. Принятая обычно формулировка этих концепций принадлежит Аристотелю; ему же принадлежат н термины «потенциальная» и «актуальная» бесконечность. Несмотря на то, что уже у Анаксагора встречаются черты обоих типов бесконечности, потенциальная бесконечность, по нашему мнению, должна была возникнуть раньше актуальной.

Дело в том, что актуальная бесконечность представляет собой более высокий уровень абстракции; она могла появиться лишь тогда, когда идея бесконечности базировалась уже на определенном научном фундаменте (каковым не могли служить древние представления о практической «бесконечности»). В эпоху Зенона актуальная бесконечность понималась как результат доведения до конца бесконечного процесса деления протяженной величины (концепция актуально бесконечно малых, основные ошибки которой были показаны Аристотелем). Подобное «завершение» бесконечного процесса, в конце которого получали непротяженные точки, свидетельствовало о смутности и неоформленности античных представлений о бесконечном, экспликация которых заняла более двух тысячелетий.

Актуальная бесконечность представляет собой самую сильную из существующих в науке абстракций бесконечности, основывающуюся на самой сильной гипотезе осуществимости. Это ясно видно хотя бы на примере получения трансфинитных чисел. Действительно, представление натурального ряда чисел не как незавершаемой последовательности, а как «готовой», цельной определенности, и последующее (также не имеющее конца) прибавление единиц к этой завершенной форме того, что незавершаемо, по любым мерилам представляет собой чрезвычайно высокую степень абстракции[1]. Поэтому название «абсолютная осуществимость», которую употребляет в своей книге Ю. А. Петров для обозначения этой гипотезы осуществимости, представляется нам вполне оправданным.

В современной математике применяются все перечисленные гипотезы осуществимости и основанные на них абстракции бесконечности. Абстракцию актуальной бесконечности обычно связывают с теоретико-множественным обоснованием математики. Г. Кантор и его последователи пытались основать на теории множеств как на фундаменте все здание современной математики. Хотя эта попытка окончилась неудачей, теория множеств продолжает играть фундаментальную роль: она является основой большинства математических дисциплин. Точка зрения, согласно которой теоретико-множественная актуальная бесконечность позволяет охватить и охарактеризовать с единой точки зрения все возможные типы бесконечного, и в наши дни имеет своих сторонников (например, Г. И. Наана).

Необходимой предпосылкой существования математики является гипотеза (или абстракция) потенциальной осуществимости, которую А. А. Марков определяет как отвлечение от реальных границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью нашей жизни в пространстве и времени[2]. На основе потенциальной осуществимости можно осуществить любой финитный процесс. Потенциальная осуществимость (вместе, с абстракцией отождествления) лежит в основе конструктивного направления в математике, однако в отличие от классической математики здесь рассматриваются исключительно конструктивные объекты и процессы. Мы не можем согласиться с конструктивистами, утверждающими, что смысл тер-

1 И то же время оно представляет собой характерный пример типично математического образа мышления, образец математического творчества.

2 А. А. Марков. Теория алгорифмов. Труды математического института им. В. А. Стеклова, т. 42, М., 1954, с. 15.

мина «потенциальная осуществимость» совпадает со смыслом классического понятия потенциальной бесконечности[3] (сам А. А. Марков термин «потенциальная бесконечность» не употребляет). Строго говоря, это разные понятия: потенциальная осуществимость есть одно из необходимых условий для потенциальной бесконечности процесса.

Конструктивное направление в математике возникло как реакция на антиномии и парадоксы теории множеств и постепенно превратилось в самостоятельную отрасль математической науки. Конструктивная математика представляет собой попытку построить здание математики, ограничиваясь теми и только теми средствами, которые заведомо не могут привести к противоречиям (и, следовательно, перевести всю математику на конструктивный язык). Несмотря на неосуществимость в полной мере конструктивистской программы, идеи конструктивистов, главным образом, А. А. Маркова и его учеников, оказали определенное влияние на исследования в области кибернетики, математической логики, прикладной математики.

В связи с этим нам, прежде всего, придется коснуться понятия алгорифма, являющегося фундаментальным для всей конструктивной математики. В общем случае алгорифмом называется эффективный способ задания, построения каком-либо величины, объекта. Алгорифмом построения натуральных чисел можно считать прибавление единицы к предыдущему числу, переход: n⊠–n–f–l. Это рассуждение предполагает, что любое натуральное число, построенное подобным способом, является конструктивным объектом. (Здесь на первый план неизбежно выходит интуитивный критерий: в общем случае не существует способа строгого различения конструктивных объектов от неконструктивных). Конструктивность исходных объектов (в рас-

3 См.: Н. А. Шанин. Конструктивные числа и функциональные пространства. Труды математического института им. В. А. Стеклова, т. 67, М.–Л., 1969, с. 18-19.

сматриваемом примере–единицы) принимается постулативно.

В качестве примера неконструктивных доказательств можно привести теоремы о средних значениях функций из математического анализа, которые относятся к числу экзистенциальных и не содержат ни малейшей возможности найти, указать то самое среднее значение, существование которого они утверждают. Теорема, согласно которой любое ограниченное бесконечное множество имеет хотя бы одну точку сгущения, которая доказывается способом «дихотомии», т. е. последовательным делением множества надвое, согласно конструктивистам, не может считаться доказанной.

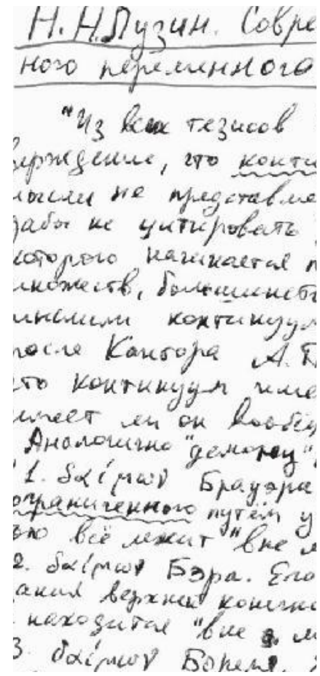
Конструктивная математика испытала на себе сильное влияние идей интуиционистов, особенно Брауэра и Вейля. Основной тезис математического интуиционизма заключается, как известно, в том, что конструктивность и существование в математике – одно и то же. Следовательно, все, что не может быть построено (в конструктивном смысле), не может считаться существующим в качестве математического объекта. «В частности, интуиционисты заявляют, что отождествление существования с невозможностью противоречия означало бы деградацию математики к пустой игре»[1]. Ясно, что такая неподходящая под рамки интуиционизма и конструктивизма абстракция, как актуальная бесконечность по Кантору, неприемлема для этих направлений.

Несмотря на позитивные идеи конструктивистов, и во многом правильную критику ими наивной теории множеств, критику, которая оказала большое влияние на формирование современных аксиоматических методов построения этой теории (в которых уже нет места антиномиям канторовской теории множеств),

1 А. Френкель, И. Бар-Хиллел. Основания теории множеств, с. 253.

следует отметить, что конструктивное направление не способно ни заменить, ни обосновать классическую математику в целом. Каждое из этих направлений имеет свою сферу приложения.

Еще более радикальным является подход к проблеме бесконечности в целом и к решению логико-математических проблем оснований математики, предлагаемый сторонниками концепции «фактической» или практической бесконечности. Представители этого направления, которые получили наименование ультраинтуиционистов, вообще отказываются от абстракции потенциальной осуществимости и бесконечности и предлагают достаточно большое (малое) в рамках данной теории приравнивать к бесконечному. Прежде чем перейти к анализу этого направления, сделаем несколько замечаний.


Н. Н. Лузин. Совре
ного переменного
"Из всех тезисов

В литературе часто встречается термин «физическая абстракция бесконечности» или просто: «физическая бесконечность». Поскольку под этим подразумевается достаточно большое (малое) в рамках данной теории или науки, то, по нашему мнению, нецелесообразно выделять его в отдельный тип бесконечного, тем более, что физика не имеет собственных абстракций бесконечности[2]. С точки зрения квантовой физики размер любой молекулы можно считать бесконечно большим, а с точки зрения космологии радиус земного шара можно принять за бесконечно малый но эта относительность понятия бесконечности происходит от нестрогого его употребления. Следовательно, практическая бесконечность не может служить в качестве физической абстракции бесконечности.

Термин «фактическая бесконечность», встречающийся в литературе, также представляется нам неудачным (он больше подходит к абстракции актуальной бесконечности) – термин «практическая бесконеч-

2 Точно также, как нецелесообразно каждую математическую дисциплину наделять своим типом бесконечности, как это делает Г. И. Наан.

ность» лучше отражает действительную суть дела: это не бесконечность в полном смысле слова, а конечное определенного типа, выполняющее роль бесконечного, так сказать, «суперконечное». Надо только всегда иметь в виду, что это «практическое» на самом деле есть теоретическое (а не ограниченное конкретными материальными условиями осуществимости, как наивная концепция практической «бесконечности»), но теоретическое, учитывающее реальные условия. Сторонники теоретико-множественного обоснования математики называют конструктивистов «финитистами». По-видимому, это название гораздо в большей степени относится к ультраинтуиционистам, которые в своих теориях не оставляют никакого места ни одному классическому типу бесконечности.

Одним из наиболее ярких представителей этого направления является голландский математик Д. Ван Данциг. В одной из своих работ Ван Данциг высказывает мысль о том, что натуральное число $\mathbf{10^{10^{10}}}$ практически ничем не отличается от бесконечности[1]. Чтобы пояснить эту мысль, надо вспомнить, что подразумевается в ультраинтуиционистском понимании под осуществимым и неосуществимым объектом. Неосуществимым считается все то, что заведомо превосходит реальные возможности человечества, а осуществимым - все, что заведомо возможно реально осуществить, реализовать имеющимися в распоряжении человека средствами. Смысл этого «заведомо» в значительной степени может варьироваться в зависимости от точки зрения того или иного автора (строгое определение этого понятия в общем случае невозможно), однако несомненно существуют в каждом рассматриваемом случае абсолютные пределы осуществимости или неосуществимости (т. е. величины или значения, до которых осуществимость или после которых неосуществимость

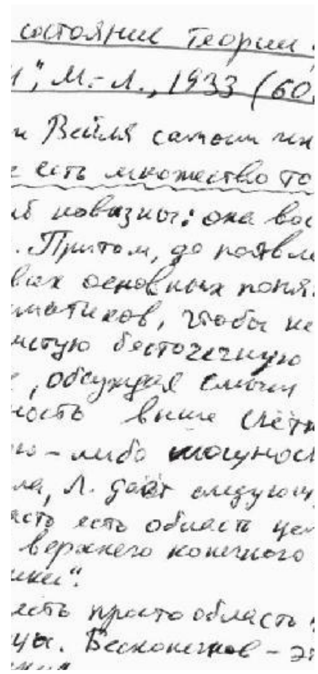
1 D. Van Dantzig, Is $10^{10^{10}}$ a Finite Number?, «Dialectica», 1956, №9.

не вызывает сомнений), хотя точное установление последних невозможно. Таким образом, то, что лежит за абсолютным пределом осуществимости, с точки зрения ультраинтуиционистов, ничем не отличается от бесконечности.

Совершенно очевидно, что для рассматриваемой концепции неприемлемы ни абстракция потенциальной осуществимости, ни абстракция абсолютной осуществимости. Действительно, построение любого сколь-угодно большого натурального числа путем последовательного прибавления единиц характеризуется как неосуществимая операция. С этой точки зрения пример, приведенный в работе Ван Данцига (единица с десятью миллиардами нулей), является весьма характерным. Для сравнения достаточно вспомнить, что в столетии содержится всего несколько миллиардов секунд, а миллиард есть, как известно, единица всего с девятью нулями. Отсюда можно себе представить (вернее, невозможно себе представить) масштабы неосуществимости числа $\mathbf{10^{10^{10}}}$ что и дает основания указанному автору сравнивать это число с бесконечностью.

Однако для подтверждения того, что существуют неосуществимые объекты, совсем не требуется уходить так далеко. Известный кибернетик У. Росс Эшби (см. его статью в сборнике «Общая теория систем», М., 1966) считает, что ничто материальное не может быть выражено числом $\mathbf{>10^{100}}$. В литературе часто приводится число $\mathbf{10^{12}}$: по мнению некоторых авторов, человеку вряд ли могут понадобиться величины, содержащие триллион единиц измерения или требующие для своего осуществления проведения триллиона операций. Таким образом, любое число $\mathbf{N>10^{12}}$ является практически неосуществимым объектом.

Выше отмечалось, что установление точной верхней границы осуществимости или точной нижней границы

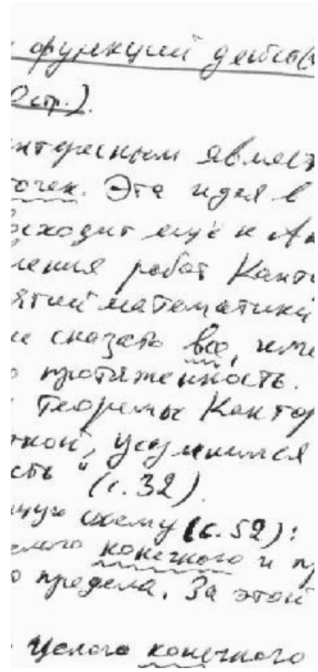


неосуществимости невозможно. В качестве аргумента в пользу этого утверждения можно привести следующее простое рассуждение. Рассмотрим ряд осуществимых объектов: каждый следующий объект получается из предыдущего по какому-то закону (алгорифму). Получая все новые осуществимые значения, мы все же убеждены, что подобным образом можно осуществить не любой объект[1], т. е. ряд не может быть неограниченно продолжен; хотя, согласно принятой гипотезе, всегда возможно получить, применив тот же алгорифм, следующий объект из предыдущего. Следовательно, в процессе продолжения ряда когда-нибудь несомненно возникнут неосуществимые объекты. Допустим, что **Xn** есть первый неосуществимый объект. Это значит, что **Xn-1** есть уже осуществимый объект. Применяя к **Xn-1** алгорифм получения следующей величины из предыдущей, получим осуществленный объект **Xn**. Таким образом, **Xn** одновременно является и осуществимым объектом и неосуществимым, что невозможно. Приходим к выводу, что в ряду объектов не существует последнего осуществимого и первого неосуществимого, что и требовалось доказать.

Что же в таком случае находится между осуществимыми и неосуществимыми объектами? Чтобы избавить свою теорию от противоречий (напоминающих «парадокс кучи»), ультраинтуиционисты вводят понятие «области неопределенности». Эта область не имеет точных границ, находящиеся внутри нее объекты не могут характеризоваться ни как осуществимые, ни как неосуществимые; следовательно, к области неопределенности неприменим закон исключенного третьего. Для подтверждения того, что в их теории неприменим закон исключенного третьего, ультраинтуиционисты приводят и следующий аргумент. Рассмотрим множество **E,** состоящее из большого количества элементов

1 Имеется в виду актуальное осуществление: построение, вычисление, одним словом, получение определенного результата.

(скажем, из ста миллиардов). Требуется узнать, применим ли к элементам этого множества предикат **P.** В каком случае может считаться истинной формула $_{\forall}\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ **(Px)** (или $_{\forall}\mathbf{x} \in \mathbf{E}\rceil$ (P(x))? По мнению ультраинтуиционистов, истинность этой формулы не может быть установлена, точно так же как и ее ложность, так как для этого пришлось бы прибрать все элементы множества, что практически неосуществимо.



Любой математик заметит в рассуждениях ультраинтуиционистов одну особенность: они касаются объектов и величин, смысл и область применения которых, вообще говоря, не может быть строго установлена. В то же время известно, что в математике употребление величин, область определения которых неизвестна, строго запрещено. Применению какой-либо функции должно предшествовать знание границ, ее существования и изменения. Однако у ультраинтуиционистов нет другого выхода, как нарушить этот запрет: ведь область определения или изменения большинства функций и конечном счете представляет собой некоторое бесконечное множество значений. В то же время гипотеза практической осуществимости несовместима с гипотезами потенциальной и «абсолютной» осуществимости. Действительно, принятие классической гипотезы потенциальной, а тем более, абсолютной осуществимости означает, что не существует неосуществимых объектов (в первом случае любой объект осуществим потенциально а во втором случае актуально), и гипотеза практической осуществимости теряет смысл. Остается заметить, что подобный обход проблемы области определения ставит ультраинтуиционистов лицом к лицу с еще более сложной проблемой определения границ правомерности экстраполирования (проблема экстраполяции рассматривается в следующей главе).

Ультраинтуиционисты принимают наряду с гипотезой практической осуществимости гипотезу осуществимости следующего шага. Приняв первую, они просто не могут не принять последнюю, хотя это и ставит их в довольно сложное положение: гипотеза осуществимости какого-либо конечного числа шагов необходимо влечет за собой гипотезу осуществимости еще одного шага (было бы бессмысленно утверждать неосуществимость одного-единственного шага по известному алгорифму, примененному для осуществления предыдущих шагов). Отсюда один шаг до гипотезы потенциальной осуществимости; надо только принять гипотезу, согласно которой осуществление следующего шага всегда возможно. Ультраинтуиционисты отказываются от этого шага (который они считают в корне неверным и необоснованным) и расплачиваются за этой дорогой ценой. Тем самым они сжигают все мосты, соединяющие их с классической математикой (с конструктивной математикой остается некоторое внешнее сходство).

Несмотря на интуитивную правильность многих рассуждений ультраинтуиционистов, такая натяжка, как область неопределенности (которая является как бы белым пятном: математику в ней буквально нечего делать), носит довольно искусственный характер[1]. Может ли быть построена строгая научная теория на расплывчатых понятиях (начиная с понятия осуществимого объекта), принципиально не поддающихся строгому определению? Кроме того, любое строгое научное определение подчиняется закону исключенного третьего, отвергаемому интуиционистами. Гильберт считал, что математика вряд ли когда-нибудь сможет отказаться от закона исключенного третьего[2]. А может быть, ультраинтуиционистская «математика» – вообще не математика, а какая-то другая, пока не имеющая названия область умственной деятельности?...

1 Причем с первого взгляда ясно, что за пределами этой области ультраинтуиционисты соблюдают закон исключенного третьего, что придает противоречивый характер их теории в целом.

2 Отнять у математика закон исключенного третьего, по выражению Гильберта, все равно, что отнять у астронома телескоп или запретить боксерам пользоваться кулаками.

Приведенные выше соображения вполне можно отнести и к ультраинтуиционистскому пониманию бесконечности. Некоторые из них прямо утверждают, что понятие бесконечности в математике может быть заменено понятием неосуществимого (см. сборник «Логические исследования», М., 1959). Такой подход немедленно ведет к «финитизации» математики, ограничению ее принципов и методов сферой конечного. На это следовало бы отметить, что неосуществимость не может заменить бесконечность в математике точно так же, как т. н. «откровенная» точка зрения не может заменить традиционной математики в целом. Бесконечность, и именно в традиционных формах, играет в математике слишком большую роль, чтобы от нее можно было так легко отказаться. Бесконечность – более глубокое понятие, чем неограниченность, которую только и можно заменить неосуществимостью. Тем не менее ультраинтуиционистам на этих довольно зыбких предпосылках удалось построить теорию, содержащую неформализуемые элементы, при помощи которой они доказали непротиворечивость простой теории типов Б. Рассела с аксиомой бесконечности и аксиоматической системы Цермело-Френкеля[3], что средствами обычной формальной математики сделать не удается.

Теории, основывающиеся на гипотезе практической осуществимости, находят довольно ограниченное применение. Органичив же математику областью практически осуществимого (т. е. сведя ее на чисто практический уровень) и заменив математическую бесконечность неосуществимостью, мы тем самым многое, ради осуществления чего математика в течение столетий поднималась по ступенькам абстракции, рискуем снова отодвинуть в область неосуществимого. Все это обусловило невыполнимость рассмотренных финитистских программ обоснования математики.

3

См. сборник «Применение логики в науке и технике». М., 1960.